Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
website: sj.ctu.edu.vn

TẬP BIẾN PHÂN TIỆM CẬN CẤP HAI VÀ ỨNG DỤNG

Lê Thanh Tùng[1]

[1] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*

Thông tin chung:
Ngày nhận: 03/09/2014
Ngày chấp nhận: 29/12/2014

Title:
Asymptotic second-order variational sets and applications

Từ khóa:
Tập biến phân, đạo hàm tiệm cận cấp hai, tập biến phân tiệm cận cấp hai, bài toán tối ưu đa trị, điều kiện tối ưu cấp hai

Keywords:
Variational sets, asymptotic second-order derivatives, variational asymptotic second-order sets, set-valued optimization problems, second-order optimality conditions

ABSTRACT

By combining variational sets, proposed by Khanh and Tuan in 2008, with asymptotic second-order derivative defined from asymptotic second-order cone, presented by Penot in 1998, we propose a new definition, asymptotic second-order variational sets, establish some their calculus rules and apply them to establish the optimal conditions for set-valued optimization problems.

TÓM TẮT

Kết hợp giữa khái niệm tập biến phân được định nghĩa bởi Khánh và Tuấn năm 2008 và khái niệm đạo hàm tiệm cận xây dựng từ nón tiệm cận, được trình bày bởi Penot năm 1998, chúng tôi đưa ra khái niệm mới là khái niệm tập biến phân tiệm cận, khảo sát một số phép toán của chúng và ứng dụng tập biến phân tiệm cận này để xét điều kiện tối ưu của bài toán tối ưu đa trị.

1 MỞ ĐẦU

Ra đời vào những năm 30 của thế kỷ XX, giải tích đa trị có một vai trò quan trọng trong toán học và trong các ứng dụng của toán học như lý thuyết tối ưu, lý thuyết điều khiển, vận trù học, phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng,... vì có nhiều hàm số trong thực tế là hàm số đa trị, nghĩa là nhận giá trị là một tập hợp. Khi khảo sát hàm đa trị, các loại đạo hàm đa trị là một công cụ quan trọng cho việc nghiên cứu nhiều vấn đề khác nhau như: các điều kiện tối ưu, các định lý về hàm ngược, hàm ẩn, sự ổn định nghiệm, tính duy nhất nghiệm,... trong nhiều mô hình toán học khác nhau. Mặc dù, có một số loại đạo hàm đa trị được sử dụng nhiều như đối đạo hàm Mordukhovich, đạo hàm contingent,... nhưng trong một số trường hợp vẫn có những loại đạo hàm khác có thể sử dụng thuận lợi hơn. Trong (Khánh và Tuấn, 2008) đã đưa ra khái niệm tập biến phân chứa được nhiều loại đạo hàm đa trị nên áp dụng thuận lợi khi xây dựng các điều kiện tối ưu của bài toán tối ưu đa trị so với cách sử dụng đạo hàm đa trị contingent và một số loại đạo hàm đa trị khác. Các phép toán của tập biến phân và một số ứng dụng các phép toán của tập biến phân đã được chúng tôi khảo sát trong (Anh *et al.*, 2011). Khi khảo sát lớp hàm không liên tục, tập xấp xỉ, được định nghĩa bởi Jourani và Thibault năm 1991, đã được chúng tôi áp dụng hiệu quả vào xét tính duy nhất nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân trong (Khánh và Tùng, 2012), và xét các điều kiện tối ưu của các dạng bài toán tối ưu hóa đơn trị trong (Khánh và Tùng, 2013), (Khánh và Tùng, 2014), và đa trị trong (Tùng, 2013). Chúng tôi cũng đã nêu ra các định nghĩa mới là đạo hàm radial cấp cao trong (Anh *et al.*, 2011), radial-contingent cấp cao trong (Diem *et al.*, 2014) và khảo sát các ứng dụng của chúng trong việc xét điều kiện tối ưu và khảo sát tính ổn định nghiệm dạng định lượng. Một số dạng đạo hàm đa trị và ứng dụng của chúng có thể tham khảo thêm trong (Gutierréz *et al.*, 2009), (Li và Zhai, 2013), (Wang *et al.*, 2011). Trong (Penot, 1998) đã đưa ra khái niệm nón tiệm cận cấp 2 và đưa ra ví dụ cho thấy nón tiệm cận cấp 2 khác với tập contingent cấp 2. Dựa trên nón tiệm cận cấp 2, (Kalashnikov *et al.*, 2006) đã đưa ra khái niệm đạo hàm tiệm cận cấp 2 và áp dụng để xây dựng điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu đa trị. Cách xây dựng điều kiện tối ưu theo hướng tiếp cận của Dubovitskii–Milutin sử dụng trên đạo hàm tiệm cận cấp 2 đã được khảo sát trong (Khan và Tammer, 2013). Một số tính chất của nón tiệm cận cấp 2 được khảo sát trong (Giorgi *et al.*, 2010). Một dạng đạo hàm tiệm cận được dùng để khảo sát điều kiện tối ưu của nghiệm hữu hiệu chặt trong (Li *et al.*, 2012).

Trong bài báo này, kết hợp giữa khái niệm tập biến phân và khái niệm đạo hàm tiệm cận xây dựng từ nón tiệm cận, chúng tôi đưa ra khái niệm mới là khái niệm tập biến phân tiệm cận, khảo sát một số phép toán của chúng và ứng dụng tập biến phân tiệm cận này để xét điều kiện tối ưu của bài toán tối ưu đa trị. Một số ví dụ cho thấy tập biến phân tiệm cận có thể áp dụng hơn trong việc xây dựng điều kiện tối ưu so với việc dùng đạo hàm tiệm cận trong (Kalashnikov *et al.*, 2006) và (Li *et al.*, 2012).

2 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này nếu không giả thiết gì thêm, chúng tôi xét X, Y, Z là các không gian định chuẩn thực, $C \subseteq Y, D \subseteq Z$ là các nón lồi đóng có đỉnh với phần trong khác rỗng. Với ánh xạ đa trị $H : X \to 2^Y$, tập xác định, đồ thị, trên đồ thị của H tương ứng được định nghĩa như sau

$$domH = \{x \in X : H(x) \neq \varnothing\},$$
$$GrH = \{(x,y) \in X \times Y : y \in H(x)\},$$
$$epiH = \{(x,y) \in X \times Y : y \in H(x) + C\}.$$

Ánh xạ profile của H, kí hiệu H_+, định nghĩa bởi $H_+(x) = H(x) + C$.

Giới hạn trên theo Painlevé-Kuratowski của ánh xạ H khi x hội tụ về x_0 được xác định bởi $\operatorname{Limsup}_{x \xrightarrow{H} x_0} H(x) = \{y \in Y \mid \exists x_n \in domH :$ $x_n \to x_0, \exists y_n \in H(x_n) : y_n \to y\}$, với $x \xrightarrow{H} x_0$ nghĩa là $x \to x_0$ và $H(x) \neq \varnothing$.

Giới hạn dưới theo Painlevé-Kuratowski của ánh xạ H khi x hội tụ về x_0 được xác định bởi $\operatorname{Liminf}_{x \xrightarrow{H} x_0} H(x) = \{y \in Y \mid \forall x_n \in domH :$ $x_n \to x_0, \exists y_n \in H(x_n) : y_n \to y\}$.

Với $A \subseteq X$, $\operatorname{int} A, clA, \partial A$ kí hiệu tương ứng cho phần trong, bao đóng, biên của A. X^* là không gian đối ngẫu của X và B_X, B_Y là hình cầu đơn vị đóng trong X, Y. Với $x_0 \in X, U(x_0)$ là tập các lân cận của x_0. Với $A \subseteq X, u \in X$, các nón sau thường được dùng $coneA = \{\lambda a \mid \lambda \geq 0, a \in A\}$, $cone_+ A = \{\lambda a \mid \lambda > 0, a \in A\}, A(u) = cone(A+u)$.

Trước hết, một số khái niệm liên quan được nhắc lại như sau.

Định nghĩa 2.1 (Aubin và Frankowska, 1990)

– Với $S \subset X, x_0 \in \overline{S}, u \in X$, nón contingent của S tại x_0 xác định bởi $T(S,x_0) = \operatorname{Limsup}_{t \to 0^+} \dfrac{S - x_0}{t}$.

Tập contingent cấp 2 của S tại (x_0, u) là $T(S, x_0, u) = \operatorname{Limsup}_{t \to 0^+} \dfrac{S - x_0 - tu}{t^2}$.

– Cho $F : X \to 2^Y$, đạo hàm contingent của F tại $(x_0, y_0) \in GrF$ là một ánh xạ đa trị từ X vào Y thỏa $GrDF(x_0, y_0) = T(GrF, (x_0, y_0))$. Đạo hàm contingent cấp 2 của F tại (x_0, y_0) tương ứng với $(u_1, v_1) \in X \times Y$ là ánh xạ đa trị từ X vào Y thỏa $GrD^2F(x_0, y_0, u, v) = T^2(GrF, (x_0, y_0), (u_1, v_1))$.

– Định nghĩa đạo hàm contingent cấp 1 và cấp 2 trong (ii) tương đương với các định nghĩa sau

$$DF(x_0, y_0)(u) = \operatorname{Limsup}_{t \to 0^+, u' \to u} \frac{F(x_0 + tu') - y_0}{t},$$

$$D^2F(x_0, y_0, u_1, v_1)(u) = \operatorname{Limsup}_{t \to 0^+, u' \to u} \frac{F(x_0 + tu_1 + t^2u') - y_0 - tv_1}{t^2}.$$

Định nghĩa 2.2

– (Penot, 1998) Với $S \subset X, x_0 \in \overline{S}, u \in X$, nón tiệm cận cấp 2 của S tại (x_0, u) được xác định bởi $T_a^2(S, x_0, u) = \underset{(t,r)\to(0^+,0^+),\frac{t}{r}\to 0}{\text{Limsup}} \dfrac{S - x_0 - tu}{rt}$.

– ((Kalashnikov *et al.*, 2006), (Li *et al.*, 2012)) Đạo hàm tiệm cận cấp 2 của F tại (x_0, y_0) tương ứng với $(u_1, v_1) \in X \times Y$ là ánh xạ đa trị từ X vào Y thỏa $GrD_a^2F(x_0, y_0, u_1, v_1) = T_a^2(GrF, (x_0, y_0), (u_1, v_1))$. Định nghĩa này tương đương với $D_a^2F(x_0, y_0, u_1, v_1)(u) =$

$$\underset{(t,r)\to(0^+,0^+),\frac{t}{r}\to 0, u'\to u}{\text{Limsup}} \frac{F(x_0 + tu_1 + rtu') - y_0 - tv_1}{rt}.$$

Ví dụ sau cho thấy định nghĩa nón tiệm cận cấp 2 của Penot trong (Penot, 1998) khác với tập contingent cấp 2.

Ví dụ 2.1. (Penot, 1998) Cho $X = R^2$, $S = \{(x;y) \in X \mid y = x^{3/2}\}$. Khi đó, với $(x_0; y_0) = (0;0), (u_1; v_1) = (0;1)$, dễ dàng kiểm tra được

$$T^2(S, (x_0, y_0), (u_1, v_1)) = \varnothing,$$

$$T_a^2(S, (x_0, y_0), (u_1, v_1)) = \{(u;v) \in R^2 \mid v \geq 0\}.$$

Định nghĩa 2.3. (Khánh và Tuấn, 2008) Cho $F : X \to 2^Y, (x_0, y_0) \in GrF$ và $v_1, v_2, ..., v_{m-1} \in Y$. Tập biến phân loại 1 được định nghĩa như sau:

$$V^1(F, x_0, y_0) = \underset{x \xrightarrow{F} x_0, t_n \to 0^+}{\text{Limsup}} \frac{F(x) - y_0}{t},$$

$$V^2(F, x_0, y_0, v_1) = \underset{x \xrightarrow{F} x_0, t_n \to 0^+}{\text{Limsup}} \frac{F(x) - y_0 - tv_1}{t^2}, ...,$$

$$V^m(F, x_0, y_0, v_1, ..., v_{m-1}) =$$

$$\underset{x \xrightarrow{F} x_0, t_n \to 0^+}{\text{Limsup}} \frac{F(x) - y_0 - tv_1 - ... - t^{m-1}v_{m-1}}{t^m}$$

Nhận xét 2.1.

– $D^2F(x_0, y_0, u_1, v_1)(u) \subset V^2(F, x_0, y_0, v_1)$, $\forall u \in X$.

– $D^2F(x_0, y_0, u_1, v_1), D_a^2F(x_0, y_0, u_1, v_1)$ trong trường hợp tổng quát là khác nhau.

– $D^2F(x_0, y_0, 0, 0)(u) = D_a^2F(x_0, y_0, 0, 0)(u)$ $= DF(x_0, y_0)(u), \forall u \in X$.

Các nhận xét trên thể hiện rõ trong các ví dụ sau.

Ví dụ 2.2 Cho $X = Y = R, F : X \to 2^Y$ xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} [x^2; +\infty), khi\, x \geq 0, \\ \varnothing \qquad\qquad , khi\;\; x < 0. \end{cases}$$

Khi đó, với

$(x_0; y_0) = (0;0) \in GrF, (u_1; v_1) = (1;0)$, ta có

$$D^2F(x_0, y_0, u_1, v_1)(u) = [1; +\infty), \forall u \in X,$$

$$V^2(F, x_0, y_0, u_1, v_1) = [0; +\infty).$$

Do đó,

$$D^2F(x_0, y_0, u_1, v_1)(u) \subset V^2(F, x_0, y_0, u_1, v_1), \forall u \in X.$$

Ví dụ 2.3. Cho $X = Y = R, F : X \to 2^Y$ xác định bởi $F(x) = \{y \in R \mid y \geq x^2 \vee y = -x^2\}$.

Khi đó, với

$(x_0; y_0) = (0;0) \in GrF, (u_1; v_1) = (1;0)$, ta có

$$D^2F(x_0, y_0, u_1, v_1)(u) = \{v \in R \mid v \geq 1 \vee v = -1\},$$

$$\forall u \in X,\; D_a^2F(x_0, y_0, u_1, v_1)(u) = \{v \in R \mid v \geq 0\}, \forall u \in X.$$

Do đó,

$D^2F(x_0, y_0, u_1, v_1), D_a^2F(x_0, y_0, u_1, v_1)$ trong trường hợp tổng quát là khác nhau.

3 TẬP BIẾN PHÂN TIỆM CẬN CẤP HAI VÀ ỨNG DỤNG

Kết hợp giữa khái niệm tập biến phân trong (Khánh và Tuấn, 2008) khái niệm đạo hàm tiệm cận xây dựng từ nón tiệm cận trong (Penot, 1998), chúng tôi đưa ra khái niệm mới là khái niệm tập biến phân tiệm cận trong định nghĩa sau.

Định nghĩa 3.1 Cho

$F : X \to 2^Y, (x_0, y_0) \in GrF$ và $v_1 \in Y$. Tập biến phân tiệm cận cấp 2 được định nghĩa như sau:

$$V_a^2(F, x_0, y_0, v_1) = \operatorname*{Limsup}_{(t,r)\to(0^+,0^+),\frac{t}{r}\to 0, x\xrightarrow{F} x_0} \frac{F(x) - y_0 - tv_1}{rt}.$$

Từ định nghĩa Limsup, các tính chất sau suy ra dễ dàng.

Mệnh đề 3.1

- $D_a^2(F,x_0,y_0,v_1)(u) \subset V_a^2(F,x_0,y_0,v_1), \forall u \in X,$
- $V_a^2(F,x_0,y_0,0) = V^2(F,x_0,y_0,0) = V^1(F,x_0,y_0),$
- $V_a^2(F,x_0,y_0,0) = \{y \in Y \mid \liminf_{x\xrightarrow{F}x_0, t\to 0^+} d(y_0 + tv_1 + rty, F(x)) = 0\}$,
- $V_a^2(F,x_0,y_0,v_1) = \{v \in Y \mid \exists (t_n, r_n) \to (0^+,0^+),$
- $\frac{t_n}{r_n} \to 0, \exists x_n \xrightarrow{F} x, \exists v_n \to v : y_0 + t_n v_1 + t_n r_n v_n \in F(x_n)\},$
- $V_a^2(F,x_0,y_0,v_1) = \{v \in Y \mid \exists (t_n, r_n) \to (0^+,0^+),$
- $\frac{t_n}{r_n} \to 0, \exists x_n \xrightarrow{F} x, \exists y_n \in F(x_n), \frac{y_n - y_0 - t_n v_1}{t_n r_n} \to v\}.$

Ví dụ 3.1. Cho

$X = Y = R, F : X \to 2^Y$ xác định bởi

$$F(x) = \{y \in R \mid y \geq -x^3\}.$$

Khi đó,

với $(x_0; y_0) = (0;0) \in GrF, (u_1; v_1) = (1;0)$, ta có $D_a^2 F(x_0, y_0, u_1, v_1)(u) = R_+, \forall u \in X,$

$V_a^2 F(x_0, y_0, v_1) = R.$

Định nghĩa tập biến phân tiệm cận cấp hai là khác biệt so với tập biến phân cấp hai được minh họa trong ví dụ dưới đây.

Ví dụ 3.2. Cho

$X = R, Y = R^2, F : X \to 2^Y$ xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} \{(0,0)\}, \text{khi } x = 0, \\ \{(\frac{1}{n^{3/2}}, \frac{1}{n^2})\}, \text{khi } x = \frac{1}{n}, n = 1,2,.... \end{cases}$$

Khi đó,

với $(x_0, y_0) = (0,(0;0)) \in GrF, v_1 = (1;0)$, ta có $V^1(F,x_0,y_0) = R_+ \times \{0\}, V^2(F,x_0,y_0,v_1) = \{(0;0)\},$ $V_a^2(F,x_0,y_0,v_1) = \{0\} \times R_+.$

Trong phần tiếp theo, một số phép toán đơn giản của tập biến phân tiệm cận được khảo sát.

Mệnh đề 3.2.

Cho $F_i : X \to 2^Y, i = 1,\ldots,k,$

$v_1 \in Y, (x_0, y_0) \in GrF_i, i = 1,\ldots,k$. Khi đó,

$$V_a^2(\bigcup_{i=1}^k F_i, x_0, y_0, v_1) = \bigcup_{i=1}^k V_a^2(F_i, x_0, y_0, v_1)$$

Chứng minh:

Với $y \in \bigcup_{i=1}^k V_a^2(F_i,x_0,y_0,v_1)$, tồn tại $i_0, y \in V_a^2(F_{i_0},x_0,y_0,v_1).$ Theo định nghĩa tập biến phân tiệm cận, tồn tại $(t_n,r_n) \to (0^+,0^+), \frac{t_n}{r_n} \to 0, \quad x_n \xrightarrow{F_{i_0}} x_0$ và $y_n \to y$ sao cho $y_0 + t_n v_1 + t_n r_n y_n \in F_{i_0}(x_n) \subseteq \bigcup_{i=1}^k F_i(x_n), \forall n.$

Do đó, $y \in V_a^2(\bigcup_{i=1}^k F_i, x_0, y_0, v_1)$.

Ngược lại, với $y \in V_a^2(\bigcup_{i=1}^k F_i, x_0, y_0, v_1)$, tồn tại $(t_n, r_n) \to (0^+,0^+), \frac{t_n}{r_n} \to 0$, $x_n \xrightarrow{\bigcup_{i=1}^k F_i} x_0$ và $y_n \to y$ sao cho $y_0 + t_n v_1 + t_n r_n y_n \in \bigcup_{i=1}^k F_i(x_n), \forall n.$ Khi đó, tồn tại i_0 sao cho $y_0 + t_n v_1 + t_n r_n y_n \in F_{i_0}(x_n), \forall n$. Do đó, $y \in V_a^2(F_{i_0}, x_0, y_0, v_1) \subset \bigcup_{i=1}^k V_a^2(F_i, x_0, y_0, v_1).$

Mệnh đề 3.2.

Cho $F_i : X \to 2^Y, i = 1,\ldots,k,$

$v_1 \in Y, (x_0, y_0) \in GrF_i, i = 1,\ldots,k$. Khi đó,

$$V_a^2(\bigcap_{i=1}^k F_i, x_0, y_0, v_1) \subset \bigcap_{i=1}^k V_a^2(F_i, x_0, y_0, v_1).$$

Chứng minh:

Với $y \in \bigcup_{i=1}^{k} V_a^2(F_i, x_0, y_0, v_1)$, thì $y \in V_a^2(F_{i_0}, x_0, y_0, v_1), \forall i.$ Khi đó, với mọi i, tồn tại $(t_n, r_n) \to (0^+, 0^+), \frac{t_n}{r_n} \to 0$, $x_n \xrightarrow{F_{i_0}} x_0$ và $y_n \to y$ sao cho $y_0 + t_n v_1 + t_n r_n y_n \in F_i(x_n), \forall n.$

Do đó, tồn tại $(t_n, r_n) \to (0^+, 0^+), \frac{t_n}{r_n} \to 0$, $x_n \xrightarrow{F_{i_0}} x_0$ và $y_n \to y$ sao cho

$$y_0 + t_n v_1 + t_n r_n y_n \in \bigcap_{i=1}^{k} F_i(x_n), \forall n.$$

Ví dụ dưới đây cho thấy bao hàm thức ngược lại trong Mệnh đề 3.2 không xảy ra trong trường hợp tổng quát.

Ví dụ 3.3.

Cho $X = Y = R, F_1, F_2 : X \to 2^Y$ xác định như sau

$$F_1(x) = \begin{cases} [-1;1], khi\ x = 0, \\ \{0\}, khi\ x \neq 0, \end{cases} F_2(x) = \begin{cases} \{0\}, khi\ x = 0, \\ [0;1], khi\ x \neq 0, \end{cases}$$

$(x_0; y_0) = (0;0) \in GrF_i, i = 1,2$ và $v_1 = 1$. Khi đó,

$V_a^2(F_1, x_0, y_0, v_1) = V_a^2(F_2, x_0, y_0, v_1) = R \Rightarrow$
$V_a^2(F_1, x_0, y_0, v_1) \cap V_a^2(F_2, x_0, y_0, v_1) = R$.

Nhưng, $(F_1 \cap F_2)(x) = \{0\}$, nên $V_a^2(F_1 \cap F_2, x_0, y_0, v_1) = \varnothing.$

Để xây dựng phép toán cộng của tập biến phân tiệm cận cấp hai, giả thiết trong định nghĩa sau được sử dụng.

Định nghĩa 3.2 (i) Cho $F : X \to 2^Y, (x_0, y_0) \in GrF$ và $v_1 \in Y$. Tập biến phân kề tiệm cận cấp 2 được định nghĩa như sau:

$$\underline{V}_a^2(F, x_0, y_0, v_1) = \operatorname*{Liminf}_{(t,r)\to(0^+,0^+), \frac{t}{r}\to 0, x \xrightarrow{F} x_0} \frac{F(x) - y_0 - tv_1}{rt}.$$

(ii) Ánh xạ F được gọi là có tập proto-biến phân tiệm cận cấp hai tại $(x_0, y_0) \in GrF$ tương ứng với $v_1 \in Y$ nếu $V_a^2(F, x_0, y_0, v_1) = \underline{V}_a^2(F, x_0, y_0, v_1)$.

Mệnh đề 3.3. Cho $F_i : X \to 2^Y, i = 1,...,k,$ $v_{1,1},...,v_{1,k} \in Y, (x_0, y_i) \in GrF_i, i = 1,...,k$, $domF_i \subset domF_1, i = 2,...,k$. Nếu $F_i, i = 2,...,k$ có các tập proto-biến phân tiệm cận cấp 2 tương ứng là $V_a^2(F_i, x_0, y_i, v_{1,i}), i = 2,...,k$, thì

$$\sum_{i=1}^{k} V_a^2(F_i, x_0, y_i, v_{1,i}) \subseteq V_a^2\Big(\sum_{i=1}^{k} F_i, x_0, \sum_{i=1}^{k} y_i, \sum_{i=1}^{k} v_{1,i}\Big).$$

Chứng minh:

Xét các $v_i \in V_a^2(F_i, x_0, y_i, v_{1,i}), i = 1,...,k$. Vì $v_1 \in V_a^2(F_1, x_0, y_1, v_{1,1})$, nên tồn tại $(t_n, r_n) \to (0^+, 0^+), \frac{t_n}{r_n} \to 0$, $x_n \xrightarrow{F_{i_0}} x_0$ và $y_{1,n} \in F_1(x_n)$ sao cho $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n t_n}(y_{1,n} - y_1 - t_n v_{1,n}) = v_1.$

Vì $F_i, i = 2,...,k$ có các tập proto-biến phân tiệm cận cấp 2 tương ứng là $V_a^2(F_i, x_0, y_i, v_{1,i}), i = 2,...,k$ và $domF_i \subset domF_1, i = 2,...,k$, nên tồn tại $y_{i,n} \in F_i(x_n), i = 2,...,k$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n t_n}(y_{i,n} - y_i - t_n v_{i,n}) = v_i, i = 2,...,k.$$

Do đó,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n t_n}\Big(\sum_{i=1}^{k} y_{i,n} - \sum_{i=1}^{k} y_i - t_n \sum_{i=1}^{k} v_{i,n}\Big) = \sum_{i=1}^{k} v_i.$$

Vậy, $\sum_{i=1}^{k} v_i \in V_a^2\Big(\sum_{i=1}^{k} F_i, x_0, \sum_{i=1}^{k} y_i, \sum_{i=1}^{k} v_{1,i}\Big)$.

Bây giờ, sử dụng tập biến phân tiệm cận cấp hai, chúng tôi xây dựng điều kiện tối ưu cho một số dạng bài toán tối ưu hóa.

Cho X, Y là các không gian định chuẩn thực, $C \subseteq Y$ là các nón lồi đóng có đỉnh với phần trong khác rỗng, ánh xạ đa trị $F : X \to 2^Y, S \subset X$. Xét bài toán tối ưu trên tập:

(P) $\quad \min F(x)$, với $x \in S$.

Điểm $(x_0, y_0) \in GrF$ là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của (P) nếu tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $(F(S \cap U) - y_0) \cap (-\operatorname{int} C) = \varnothing$ với $F(S \cap U) = \bigcup_{x \in S \cap U} F(x)$.

Để xây dựng điều kiện tối ưu của (P), bổ đề sau được dùng.

Bổ đề 3.1. (Khánh và Tuấn, 2008) Nếu $K \subset X$ là nón lồi, đóng có phần trong khác rỗng, $z_0 \in -K,\ z \in -\operatorname{int}\operatorname{cone}(K+z_0)$, $\frac{1}{t_n}(z_n - z_0) \to z$ và $t_n \to 0^+$, thì $z_n \in -\operatorname{int} K$ với *n* đủ lớn.

Định lý 3.1. Nếu (x_0, y_0) là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của (P) với mọi

$v_1 \in V^1(F_+, x_0, y_0) \cap (-\partial C)$, ta có

$$V^2(F_+, x_0, y_0, v_1) \cap (-\operatorname{int} C(v_1)) = \varnothing,$$
$$V_a^2(F_+, x_0, y_0, v_1) \cap (-\operatorname{int} C(v_1)) = \varnothing.$$

Chứng minh: Với

$v_1 \in V^1(F_+, x_0, y_0) \cap (-\partial C)$, ta sẽ chứng minh

$$V_a^2(F_+, x_0, y_0, v_1) \cap (-\operatorname{int} C(v_1)) = \varnothing \qquad (1)$$

(còn $V^2(F_+, x_0, y_0, v_1) \cap (-\operatorname{int} C(v_1)) = \varnothing$ chứng minh tương tự).

Giả thiết phản chứng, tồn tại $y \in V_a^2(F_+, x_0, y_0, v_1) \cap (-\operatorname{int} C(v_1))$. Khi đó, tồn tại $(t_n, r_n) \to (0^+, 0^+), \frac{t_n}{r_n} \to 0$, $x_n \xrightarrow{F} x_0$ và $y_n \in F(x_n) + C$ sao cho $\frac{1}{r_n t_n}(y_n - y_0 - t_n v_1) \to y$ với $y \in -\operatorname{int} C(v_1)$.

Do đó, $\frac{1}{r_n}(\frac{y_n - y_0}{t_n} - v_1) \to y$. Theo Bổ đề 3.1, với *n* đủ lớn $\frac{y_n - y_0}{t_n} \in -\operatorname{int} C \Rightarrow y_n - y_0 \in -\operatorname{int} C$, mâu thuẫn với giả thiết, (x_0, y_0) là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của (P).

Cho X, Y, Z là các không gian định chuẩn thực, $C \subseteq Y, D \subseteq Z$ là các nón lồi đóng có đỉnh với phần trong khác rỗng, ánh xạ đa trị $F : X \to 2^Y, G : X \to 2^Z, S \subset X$. Xét bài toán tối ưu có ràng buộc :

(CP) $\min F(x)$, với $x \in S, G(x) \cap -D \neq \varnothing$.

Gọi $A = \{x \in S : G(x) \cap -D \neq \varnothing\}$ là tập chấp nhận được của (CP). Điểm $(x_0, y_0) \in GrF$ là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của (CP) nếu tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $(F(A \cap U) - y_0) \cap (-\operatorname{int} C) = \varnothing$.

Định lý 3.2. Nếu (x_0, y_0) là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của (CP) và $z_0 \in G(x_0) \cap -D$, với mọi $(v_1, w_1) \in V^1((F,G)_+, x_0, y_0) \cap -\partial(C \times D(z_0))$, ta có

$$V^2((F,G)_+, x_0, y_0, (v_1, w_1)) \cap -\operatorname{int}(C(v_1) \times D(z_0)) = \varnothing,$$
$$V_a^2((F,G)_+, x_0, y_0, (v_1, w_1)) \cap -\operatorname{int}(C(v_1) \times D(z_0)) = \varnothing.$$

Chứng minh: Với

$(v_1, w_1) \in V^1((F,G)_+, x_0, y_0) \cap -\partial(C \times D(z_0))$, ta sẽ chứng minh $V_a^2((F,G)_+, x_0, y_0, (v_1, w_1)) \cap -\operatorname{int}(C(v_1) \times D(z_0)) = \varnothing$

(chứng minh $V^2((F,G)_+, x_0, y_0, (v_1, w_1)) \cap -\operatorname{int}(C(v_1) \times D(z_0)) = \varnothing$ xem trong (Khánh và Tuấn, 2008)).

Giả thiết phản chứng, tồn tại $y, z) \in V_a^2((F,G)_+, x_0, y_0, (v_1, w_1)) \cap -\operatorname{int}(C(v_1) \times D(z_0))$.

Khi đó, tồn tại $(t_n, r_n) \to (0^+, 0^+), \frac{t_n}{r_n} \to 0$, $x_n \xrightarrow{F} x_0$ và $(y_n, z_n) \in (F,G)(x_n) + C \times D$ sao cho $\frac{1}{r_n t_n}((y_n, z_n) - (y_0, z_0) - t_n(v_1, w_1)) \to (y, z)$ với $y \in -\operatorname{int} C(v_1)$ và $z \in -\operatorname{int} D(z_0)$.

Do đó, $\frac{1}{r_n}(\frac{y_n - y_0}{t_n} - v_1) \to y$. Theo Bổ đề 3.1, với *n* đủ lớn, $\frac{y_n - y_0}{t_n} \in -\operatorname{int} C \Rightarrow y_n - y_0 \in -\operatorname{int} C$.

Vì $w_1 \in -\operatorname{int} D(z_0)$, tồn tại $d_1 \in D$ và $\alpha \geq 0$ sao cho $w_1 = -\alpha(d_1 + z_0)$. Khi đó, từ

$$\frac{1}{r_n t_n}(z_n - z_0 - t_n w_1) = \frac{1}{r_n t_n}(z_n - z_0 + t_n \alpha(d_1 + z_0))$$
$$= \frac{1}{r_n t_n}(z_n + t_n \alpha d_1 - (1 - t_n \alpha) z_0)$$
$$= \frac{1 - t_n \alpha}{r_n t_n}(\frac{z_n + t_n \alpha d_1}{1 - t_n \alpha} - z_0) \to z$$

áp dụng Bổ đề 3.1 (đặt $\frac{1}{h_n} = \frac{1 - t_n \alpha}{r_n t_n}$, thì $h_n \to 0^+$), với *n* đủ lớn,

$$\frac{z_n + t_n \alpha d_1}{1 - t_n \alpha} \in -\operatorname{int} D \Rightarrow z_n + t_n \alpha d_1 \in -\operatorname{int} D$$

$$\Rightarrow z_n \in -D - \operatorname{int} D \subset -\operatorname{int} D .$$

Mặt khác, vì $(y_n, z_n) \in (F,G)(x_n) + C \times D$, nên tồn tại $(\overline{y}_n, \overline{z}_n) \in (F,G)(x_n)$, $(c_n, d_n) \in C \times D$ sao cho $(y_n, z_n) = (\overline{y}_n, \overline{z}_n) + (c_n, d_n)$.

Do đó, với *n* đủ lớn, ta có

$y_n - y_0 \in -\operatorname{int} C, G(x_n) \cap -D \neq \varnothing$ (vì $\overline{z}_n \in -\operatorname{int} D$),

mâu thuẫn với giả thiết, (x_0, y_0) là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của (CP).

Các ví dụ sau cho thấy các điều kiện tối ưu dùng tập biến phân tiệm cận áp dụng tốt hơn so với các điều kiện tối ưu dùng đạo hàm tiệm cận.

Ví dụ 3.4.

Cho $X = Y = R, S = X, C = R_+, (x_0, y_0) = (0,0)$, ánh xạ $F: X \to 2^Y$ xác định bởi $F(x) = \{y \in R \mid y \geq -x^3\}$. Khi đó, $v_1 \in D(F_+, x_0, y_0)(u_1) \cap -\partial C = \{0\}, \forall u_1 \in X$, thì $v_1 = 0$ và ta có

$D^2(F_+, x_0, y_0, u_1, v_1)(u) =$
$D_a^2(F_+, x_0, y_0, u_1, v_1)(u) = R_+, \forall u \in X$,
$D^2(F_+, x_0, y_0, u_1, v_1)(u) \cap (-\operatorname{int} C - \{v_1\}) =$
$D_a^2(F_+, x_0, y_0, u_1, v_1)(u) \cap (-\operatorname{int} C - \{v_1\}) \neq \varnothing, \forall u \in X$

Định lý 3.1 trong (Kalashnikov *et al.*, 2006), không thể dùng để bác bỏ kết luận (x_0, y_0) không phải là nghiệm hữu hiệu yếu của (P). Nhưng với $v_1 \in V^1(F_+, x_0, y_0) \cap (-\partial(C \times D(z_0)) = \{0\}$, thì $V^2(F_+, x_0, y_0, v_1) = V_a^2(F_+, x_0, y_0, v_1) = R$, nên

$$V^2(F_+, x_0, y_0, v_1) \cap -\operatorname{int} C = V_a^2(F_+, x_0, y_0, v_1) \cap -\operatorname{int} C \neq \varnothing.$$

Áp dụng Định lý 3.1, (x_0, y_0) không phải là nghiệm hữu hiệu yếu của (P).

Ví dụ 3.4.

Cho $X = Y = Z = R, S = X, C = D = R_+, (x_0, y_0) = (0,0), z_0 = 0$, ánh xạ $F: X \to 2^Y$ xác định bởi $F(x) = \{y \in R \mid y \geq -x^3\}$, ánh xạ $G: X \to 2^Z$ xác định bởi $G(x) = \{0\}$. Khi đó, $\forall u_1 \in T(S, x_0) = R$, thì $T^2(S, x_0, u_1) = T_a^2(S, x_0, u_1) = R$, với $0 \in DG(x_0, 0)(u_1) = \{0\}$ và với $v_1 \in D(F_+, x_0, y_0)(u_1) \cap -\partial C = \{0\}$, thì dễ dàng kiểm tra được các tính chất của Định lý 3.1 trong (Li *et al.*, 2012) đều thỏa với

$$D_l^2(F, x_0, y_0, u_1, v_1)(u) = D_{0l}^2(F_+, x_0, y_0, u_1, v_1)(u) = R_+,$$

$\forall u \in X$, trong đó ký hiệu

$$D_l^2 F(x_0, y_0, u_1, v_1) = \operatorname*{Liminf}_{t \to 0^+, u' \to u} \frac{F(x_0 + tu_1 + \frac{1}{2}t^2 u') - y_0 - tv_1}{t^2},$$

$$D_{0l}^2 F(x_0, y_0, u_1, v_1) = \operatorname*{Liminf}_{(t,r) \to (0^+, 0^+), \frac{t}{r} \to 0, u' \to u} \frac{F(x_0 + tu_1 + \frac{1}{2}rtu') - y_0 - tv_1}{rt}.$$

Do đó, không thể áp dụng Định lý 3.1 trong (Li *et al.*, 2012) để bác bỏ kết luận (x_0, y_0) không phải là nghiệm hữu hiệu yếu của (CP) (với ràng buộc dạng $0 \in G(x)$, là trường hợp đặc biệt của $G(x) \cap -D \neq \varnothing$).

Vì $A = \{x \in S : 0 \in G(x)\} = S.$ Nên bài toán (CP) với ràng buộc dạng $0 \in G(x)$ trùng với (P). Tương tự như Ví dụ 3.3, dùng Định lý 3.1 có thể kết luận (x_0, y_0) không phải là nghiệm hữu hiệu yếu của (CP).

4 KẾT LUẬN

Trong bài báo này, khái niệm tập biến phân tiệm cận cấp hai đã được định nghĩa, khảo sát một số phép toán và ứng dụng vào xét điều kiện tối ưu của một số dạng bài toán tối ưu đa trị. Các ví dụ cho thấy tập biến phân tiệm cận cấp hai khác với tập biến phân cấp hai và có thể áp dụng tốt hơn khi xét các điều kiện tối ưu so với dùng đạo hàm tiệm cận cấp hai. Các điều kiện tối ưu cho các dạng nghiệm hữu hiệu khác có thể xây dựng tương tự. Tập biến phân tiệm cận có thể ứng dụng vào xét sự ổn định nghiệm dạng định lượng tương tự như tập biến phân. Ngoài ra, có thể dựa vào tập biến phân cấp *m,* với $m > 2$, để mở rộng tương tự cho tập biến phân tiệm cận cấp *m,* với $m > 2$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Anh, N.L.H., Khanh, P.Q. and Tung, L.T., 2011. Variational sets: Calculus and applications to nonsmooth vector optimization. Nonlinear Analysis TMA. 74: 2358-2379.
2. Anh, N.L.H., Khanh, P.Q. and Tung, L.T., 2011. Higher-order radial derivatives and

optimality conditions in nonsmooth vector optimization. Nonlinear Analysis TMA. 74: 7365-7379.

3. Aubin, J.-P. and Frankowska, H., 1990. Set-valued Analysis. Birkhäuser, boston. 461 pp.
4. Diem, H.T.H., Khanh, P.Q. and Tung, L.T., 2014. On higher-order sensitivity analysis in nonsmooth vector optimization. Journal of Optimization Theory and Applications. 162: 463-488.
5. Giorgi, G., Jiménez, B. and Novo, V., 2010. An overview of second order tangent sets and their application to vector optimization. Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada. 52: 73-96.
6. Gutierréz, C., Jiménez, B. and Novo, V., 2009. New second-order directional derivative and optimality conditions in scalar and vector optimization. Journal of Optimization Theory and Applications. 142: 85-106.
7. Kalashnikov, V., Jadamba, B. and Khan, A.A., 2006. First and second order optimality conditions in set optimization. *In*: Dempe, S. and Kalashnikov,V. (Editors). Optimization with multivalued mappings. Theory, applications, and algorithms, Optimization and Its Applications. Springer, New York. 2: 265-276.
8. Khan, A.A. and Tammer, C., 2013. Second-order optimality conditions in set-valued optimization via asymptotic derivatives. Optimization.62: 743-758.
9. Khanh P.Q. and Tuan, N.D., 2008. Variational sets of multivalued mappings and a unified study of optimality conditions. Journal of Optimization Theory and Application. 139: 45-67.
10. Khanh P.Q. and Tung, L.T., 2012. Local uniqueness solution to Ky Fan vector inequalities using approximations as derivatives. Journal of Optimization Theory and Applications. 155: 840-854.
11. Khanh P.Q. and Tung, L.T., 2013. First and second-order optimality conditions using approximation for vector equilibrium problems with constraints. Journal of Global Optimization. 55: 901-920.
12. Khanh P.Q. and Tung, L.T., 2014. First and second-order optimality condition for multi-objective fraction programming. TOP. Online first. DOI 10.1007/s11750-014-0347-7.
13. Lê Thanh Tùng, 2013. Điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng đa trị sử dụng tập xấp xỉ đa trị. Kỷ yếu hội nghị khoa học tự nhiên, Nxb Đại học Cần Thơ. 19-27.
14. 1Li, S.J. and Zhai, J., 2013. Second-order asymptotic differential properties and optimality conditions for weak vector variational inequalities. Optimization Letter. 6: 503-523.
15. Li, S.J., Zhu, S.K. and Li, X.B., 2012. Second-order optimality conditions for strict efficiency of constrained set-valued optimization. Journal of Optimization Theory and Applications. 155: 534-577.
16. Penot, J.P., 1998. Second-order conditions for optimization problems with constraints. SIAM Journal of Control Optimization. 37: 303-318.
17. Wang, Q.L., Li, S.J. and Teo, K.L., 2011. Higher-order generalized adjacent derivative and applications to duality for set valued Optimization. Taiwanese Journal of Mathematics. 15: 1021-1036.