

TỔ CHỨC TOÁN HỌC ĐỐI VỚI KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN: MỘT NGHIÊN CỨU THEO CÁCH TIẾP CẬN DIDACTIC TOÁN

Nguyễn Phú Lộc¹ và Huỳnh Thanh Liêm¹

¹ Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ

Thông tin chung:

Ngày nhận: 12/08/2014

Ngày chấp nhận: 14/08/2015

Title:

Mathematical organizations of the integral concept: A study based on approach to mathematical didactics

Từ khóa:

Tích phân, tổ chức toán học, didactic toán, giáo dục toán học, giảng dạy toán học

Keywords:

Integral, mathematical organization, mathematical didactics, mathematics education

ABSTRACT

In Grade 12 math program, students have an opportunity to learn the concept “integral” and its applications. Thus, they know the practical significance of mathematics in general and calculus in particular. In addition, they also recognize that mathematics is a unified whole, the subjects of mathematics are consistent and mutually supportive. For example, thanks to integral, one can find the formula for calculating the area and volume of shapes that students have learned in Geometry, and can calculate the area and volume of shapes that it is very hard to find by geometrical tools. With such an importance of integral concept, the question is that in calculus Grade 12 textbook, what are mathematics organizations related to mathematical concepts? And what are students’ restrictions on the application and the perception towards concepts “integral”? This paper presents some results relating to the above two questions.

TÓM TẮT

Trong chương trình môn Toán lớp 12, học sinh được học khái niệm tích phân và các ứng dụng. Nhờ đó, các em thấy được ý nghĩa thực tiễn của Toán học nói chung và của môn Giải tích nói riêng. Ngoài ra, các em còn nhận biết được rằng, toán học là một thể thống nhất, các phân môn toán có sự nhất quán và hỗ trợ lẫn nhau. Chẳng hạn, với tích phân người ta có thể tìm lại các công thức tính diện tích và thể tích các hình mà học sinh đã học trong Hình học và có thể tính được diện tích và thể tích các hình mà với công cụ Hình học rất khó có thể tìm ra. Với tầm quan trọng của khái niệm tích phân như thế, vấn đề đặt ra là các sách giáo khoa Giải tích 12 đã bao gồm các tổ chức toán học nào liên quan đến khái niệm này và những hạn chế về nhận thức và vận dụng khái niệm tích phân có thể có của học sinh ra sao? Nội dung bài báo góp phần trả lời hai câu hỏi trên.

1 TỔ CHỨC TOÁN HỌC: MỘT KHÁI NIỆM ĐẶC THÙ CỦA DIDACTIC TOÁN

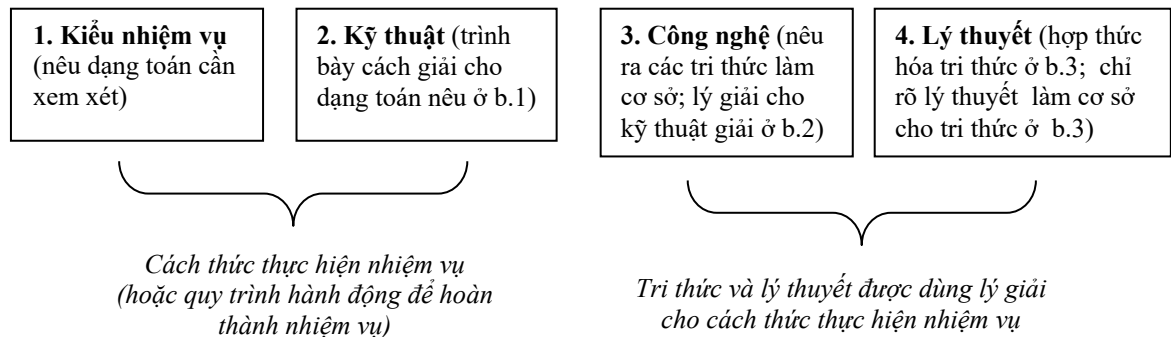
Xuất phát từ việc xem hoạt động toán học như một hoạt động của con người: chủ thể thực hiện một kiểu nhiệm vụ nào đó trong một thể chế xác định, trường phái Didactic toán (Bessot và ctv., 2010) đã lập luận rằng khi tiến hành một nhiệm vụ toán học, chủ thể phải biết “cách thức” thực hiện

(know – how) và đưa ra những lý giải cho quá trình hành động trên cơ sở lý thuyết toán học liên quan (knowledge); và từ đó, họ đã đưa ra khái niệm “tổ chức toán học” (mathematics organization) với bốn thành phần: kiểu nhiệm vụ T, kỹ thuật τ , công nghệ θ , lý thuyết Θ và được mô hình hóa như sau:

$$[T, \tau, \theta, \Theta] \quad (1)$$

Mô hình này có ý nghĩa là: mỗi hoạt động của con người đều nhằm thực hiện nhiệm vụ t thuộc kiểu nhiệm vụ T nào đó nhờ sử dụng kỹ thuật τ , τ được giải thích bởi công nghệ θ , và cuối cùng

công nghệ θ được hợp thức hóa bởi lý thuyết Θ . Để giúp hiểu rõ hơn về mô hình (1), Nguyễn Phú Lộc (2014) đã diễn giải lại như sau (xem Hình 1).



Hình 1: Sơ đồ diễn giải “tổ chức toán học”

Nguyễn Phú Lộc, 2014

2 PHÁT BIỂU VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

Khái niệm tích phân đóng vai trò rất quan trọng trong chương trình Giải tích 12. Thông qua tích phân, học sinh thấy rõ hơn những ứng dụng của môn Giải tích trong thực tiễn cũng như mối tương hỗ và nhất quán với nhau giữa các phân môn toán học. Nhờ tích phân mà ta có thể chứng minh lại được các công thức diện tích và thể tích của các hình quen thuộc, có thể tìm ra diện tích và thể tích các hình mà với công cụ hình học thuần túy khó có thể tìm thấy. Với vai trò như thế, một câu hỏi được đặt ra là:

Các tổ chức toán học đối với khái niệm tích phân trong hai bộ sách giáo khoa Giải tích và Giải tích 12 nâng cao gồm những nội dung gì?

Nội dung bài viết sẽ góp phần trả lời câu hỏi trên và tiến hành kiểm chứng một giả thuyết sau đây:

Giả thuyết H₁: Trong quá trình tính tích phân bằng định nghĩa (công thức Newton-Leibniz), học sinh quen thuộc với đề bài cho hàm số $f(x)$ bằng biểu thức. Khi $f(x)$ được cho bằng đồ thị, học sinh không có nhiệm vụ tìm dạng biểu thức của $f(x)$ để thay vào công thức Newton Leibniz.

3 PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU VÀ ĐỐI TƯỢNG KHẢO SÁT

– **Phân tích nội dung:** Phân tích nội dung

toán học liên quan đến khái niệm tích phân. Chúng tôi phân tích các sách sau đây:

– $M_1; E_1; G_1$ lần lượt là Giải tích 12 – nâng cao (Đoàn Quỳnh và *ctv.*, 2012a), Bài tập Giải tích 12 – nâng cao (Nguyễn Huy Đoàn và *ctv.*, 2012), Giải tích 12 nâng cao -Sách giáo viên (Đoàn Quỳnh và *ctv.*, 2012b).

– $M_2; E_2; G_2$ lần lượt là Giải tích 12 (Trần Văn Hạo và *ctv.*, 2012a), Bài tập Giải tích 12 (Vũ Tuấn và *ctv.*, 2012), Giải tích 12 - Sách giáo viên (Trần Văn Hạo và *ctv.*, 2012b).

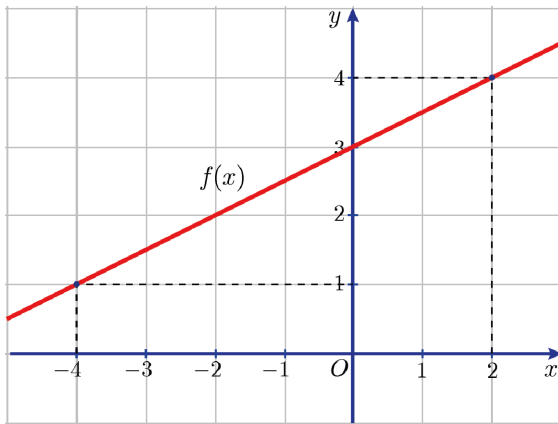
– Thử nghiệm sư phạm:

Đối tượng khảo sát: Học sinh bốn lớp 12A₁ (N=32) và 12A₂ (N=36) thuộc Trường trung học phổ thông Nguyễn Trung Trực, lớp 12C₅ (N=33) và 12C₆ (N=34) thuộc Trường trung học phổ thông Nguyễn Hữu Cảnh, tỉnh An Giang.

Công cụ dùng thử nghiệm: Kiểm tra (Test). Kiểm tra học sinh bằng một bài toán để kiểm chứng H₁ như sau:

Bài toán 1. (Kiểm chứng giả thuyết H₁)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hãy tính tích phân $I = \int_{-4}^2 f(x)dx$.



Nhận định ban đầu:

Trong quá trình dạy học khái niệm tích phân, chúng tôi cho rằng đã tồn tại một hợp đồng ngầm ẩn giữa giáo viên và học sinh, đó là, khi thầy giáo cho đề với yêu cầu tính tích phân thì học sinh không cần phải xác định dạng biểu thức của $f(x)$ nữa vì đề bài thầy luôn cho sẵn rồi. Trường hợp đề bài yêu cầu tính tích phân, trong đó hàm số $f(x)$ không được cho bằng biểu thức mà được cho bằng đồ thị như bài 1 đã dẫn đến sự phá vỡ hợp đồng và chúng tôi dự đoán rằng HS sẽ không tìm dạng biểu thức của $f(x)$ vì đó không phải là nhiệm vụ của các em.

Các chiến lược giải có thể ở bài 1 là:

Chiến lược S1. Xác định dạng biểu thức của $f(x)$, sau đó sử dụng công thức Newton-Leibniz.

Cái có thể quan sát. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $(-4; 1)$ và điểm $(2; 4)$ nên phương trình

$$\text{có dạng } y = \frac{x}{2} + 3.$$

Khi đó

$$I = \int_{-4}^2 \left(\frac{x}{2} + 3 \right) dx = \left(\frac{x^2}{4} + 3x \right) \Big|_{-4}^2 = 7 - (-8) = 15.$$

Chiến lược S2. Công thức diện tích sơ cấp

S2a. Tổng hai diện tích

I là tổng diện tích (tính bằng đvdt) của hình chữ nhật (6 đvdt) và hình tam giác (9 đvdt). *Cái có thể quan sát* $I = 6 + 9 = 15$.

S2b. Hiệu hai diện tích

I là hiệu diện tích (tính bằng đvdt) của hình chữ nhật (24 đvdt) và hình tam giác (9 đvdt). $I = 24 - 9 = 15$

S2c. Diện tích hình thang vuông

Cái có thể quan sát: I là diện tích (tính bằng đvdt) của hình thang vuông: $I = \frac{1}{2}(1 + 4)6 = 15$.

4 KẾT QUẢ VÀ BÀN LUẬN

4.1 Tổ chức toán học đối với khái niệm tích phân

4.1.1 Kết quả

Qua phân tích các sách $M_1; E_1; M_2; E_2$, chúng tôi thu được kết quả là có ba kiểu nhiệm vụ liên quan đến khái niệm tích phân, cụ thể là:

T_1 : Tính tích phân.

T_{1a} : Tính tích phân không dùng nguyên hàm.

T_{1b} : Tính tích phân dùng định nghĩa.

T_2 : Tính quãng đường vật di chuyển được.

T_3 : Tính diện tích hình phẳng.

Kiểu nhiệm vụ T_1 : Tính tích phân $\int_a^b f(x) dx$.

– Kiểu nhiệm vụ T_{1a} : Tính tích phân không dùng nguyên hàm.

Kỹ thuật τ_{1a} : Kỹ thuật giải quyết kiểu nhiệm vụ gồm các bước sau:

Bước 1: Vẽ đồ thị của hàm số dưới dấu tích phân.

Bước 2: Dựa vào hình vẽ, sử dụng công thức tính diện tích của những hình giới hạn bởi đường thẳng và cung tròn (như hình tam giác, hình vuông, hình tròn...) để tính tích phân.

Công nghệ Θ_{1a} : Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân

Lý thuyết Θ_{1a} : Ý nghĩa hình học của tích phân.

Ví dụ ($T_{1a}; \tau_{1a}$): Xem bài tập 10, M_1 , trang 152.

– Kiểu nhiệm vụ T_{1b} : Tính tích phân dùng định nghĩa.

Kỹ thuật τ_1 : Kỹ thuật giải quyết kiểu nhiệm vụ gồm các bước sau:

Bước 1: Tìm nguyên hàm của hàm số dưới dấu tích phân.

Bước 2: Tính tích phân dựa vào công thức

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Công nghệ Θ_{1b} : Sử dụng định nghĩa tích phân (công thức Newton – Leibniz) và bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp.

Lý thuyết Θ_{1b} : Định nghĩa tích phân.

Ví dụ $(T_{1b}; \tau_{1b})$: Xem ví dụ 1, M₁, trang 149.

Kiểu nhiệm vụ T₂: Tính quãng đường vật di chuyển được.

Kỹ thuật giải quyết τ_2 :

Bước 1: Dựa vào dữ kiện đề bài xác định cận tích phân, hàm số dưới dấu tích phân.

Bước 2: Sử dụng định nghĩa tích phân để tính quãng đường.

Bảng 1: Thống kê bài tập theo kiểu nhiệm vụ

Kiểu nhiệm vụ	Chương trình nâng cao			Chương trình chuẩn					
	Ví dụ - Hoạt động	Sách M ₁	Sách E ₁	Cộng	Ví dụ - Hoạt động	Sách M ₂	Sách E ₂	Cộng	
T ₁	T _{1a}		1		1				
	T _{1b}	2	1	5	8	3	2	1	6
T ₂		1	4	2	7				
T ₃		4	7	12	23	3	3	3	9
Tổng cộng		6	13	19		7	6	4	

4.1.2 Bàn luận

Qua Bảng 1, chúng ta thấy rằng sách giáo khoa cơ bản không đưa những bài tập có hình như sách nâng cao, không đưa vào những bài tập ứng dụng tích phân vào tính quãng đường đi của vật trong vật lí.

Sách nâng cao có dạng bài tập sử dụng công thức của hình học sơ cấp để tính diện tích mà không dùng nguyên hàm, nhưng rất ít đây là cái bổ sung đáng chú ý của GT_{NC}.

Tuy nhiên, cả sách nâng cao và cơ bản đều vắng bóng những bài tập tính diện tích nhưng không cho trước dạng biểu thức của hàm $f(x)$.

Công nghệ Θ_2 : Sử dụng định nghĩa và ý nghĩa cơ học của tích phân.

Lý thuyết Θ_2 : Định nghĩa và ý nghĩa cơ học của tích phân

Ví dụ về $(T_2; \tau_2)$: Xem ví dụ 2, M₁, trang 150.

Kiểu nhiệm vụ T₃: Tính diện tích hình phẳng.

Kỹ thuật τ_3 :

Bước 1: Xét dấu biểu thức dưới dấu tích phân,

Bước 2: Áp dụng công thức tính diện tích và định nghĩa tích phân

Công nghệ Θ_3 : Sử dụng công thức tính diện tích hình phẳng.

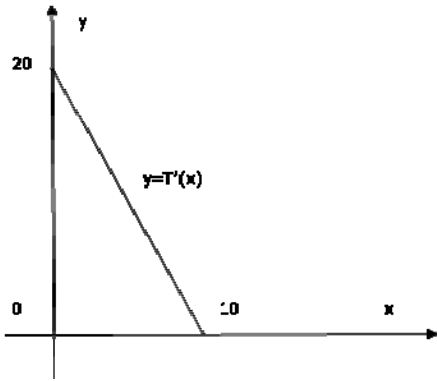
Lý thuyết Θ_3 : Ý nghĩa hình học của tích phân

Ví dụ $(T_3; \tau_3)$: Xem ví dụ 2, M₁, trang 164.

Chính điều này đã làm chúng tôi trầm trồ rằng, liệu cách thiết kế hệ thống bài tập như vậy có làm học sinh khó vận dụng thực tiễn?

Trong thực tiễn thường có những bài tập yêu cầu tính diện tích nhưng không cho sẵn $f(x)$ dưới dạng biểu thức, buộc HS phải suy nghĩ để tìm dạng biểu thức có thể, thiết nghĩ nếu cho như vậy HS có biết làm không? Chẳng hạn, bài toán sau đây:

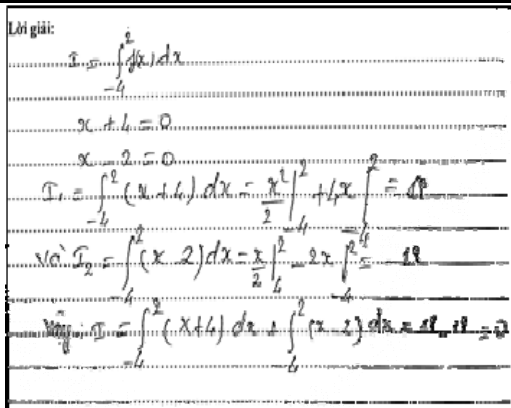
“Giả sử tốc độ thay đổi của thời gian $T'(x)$ của một người thợ làm ra một sản phẩm x trong mỗi ngày làm việc được biểu diễn bằng đồ thị như sau:



Hỏi người thợ phải tốn bao nhiêu thời gian để làm ra 5 sản phẩm?

Bảng 2: Thống kê các câu trả lời Bài 1 của HS

Câu trả lời	Chiến lược				Lời giải với chiến lược sai	Không trả lời	Tổng
	S1	S2a	S2b	S2c			
Số lượng	0	0	0	0	104	31	135
%	0%	0%	0%	0%	77%	23%	100%



Hình 2: Lời giải sai của một học sinh

Qua bài làm của HS này cho thấy, khi đề bài không cho $f(x)$ dưới dạng biểu thức như các em thường gặp, các em sẽ lúng túng và cố gắng đưa một đáp án hay một lời giải cho bài làm, thể hiện một hợp đồng didactic quen thuộc: thầy giáo cho đề, nhiệm vụ của HS là phải đưa ra lời giải.

Để biết nguyên nhân vì sao HS không làm được và gặp khó khăn chỗ nào, có đúng như nhận định ban đầu của chúng tôi hay không? Chúng tôi tiến hành phỏng vấn vài HS với câu hỏi như sau:

Hỏi (Học sinh thứ nhất): Em thấy câu 1 có phải là dạng toán quen thuộc đối với em không?

Trả lời: Em thấy bài này lạ, em chưa từng làm bao giờ.

Hỏi: Em thấy lạ chỗ nào?

4.2 Kết quả kiểm nghiệm giả thuyết H1

Bảng 2 trình bày kết quả khảo sát đối với Bài 1 và cho thấy rằng có rất nhiều HS không trả lời hoặc trả lời sai. Các chiến lược S2 (S2a, S2b, S2c) không HS nào lựa chọn, đều đó chứng tỏ: HS chỉ tập trung vào việc tính tích phân bằng định nghĩa mà không chú ý rằng, nếu không giải được theo chiến lược S1, HS cũng có thể tính diện tích dựa vào ý nghĩa hình học của tích phân. Trong 135 HS được chọn làm thực nghiệm có 104 HS không đưa ra được chiến lược giải (chiếm 77%) và có 31 HS không có câu trả lời (chiếm 23%). Hình 2 minh họa, một lời giải với chiến lược sai của một HS.

Trả lời: Em nghĩ mỗi khi bài toán yêu cầu tính tích phân thường cho hàm $f(x)$ cụ thể, bài này em thấy đề bài không cho $f(x)$ nên em không biết làm.

Hỏi: (Học sinh thứ hai) Em nghĩ đề bài câu 1 như thế nào? Có quá khó đối với em không?

Trả lời: Em nghĩ đề bài cho không khó, nhưng mà thiếu dữ kiện, đề bài cho thiếu $f(x)$.

Kết quả cho thấy đúng như dự đoán và giả thuyết H_1 của chúng tôi, trong quá trình tính tích phân bằng định nghĩa, HS không có nhiệm vụ đi tìm dạng biểu thức của $f(x)$.

Kết luận: chấp nhận giả thuyết H_1 mà chúng tôi đưa ra.

5 KẾT LUẬN

Từ kết quả nghiên cứu thu được đối với khái niệm tích phân, chúng ta có thể kết luận rằng việc lĩnh hội tri thức của học sinh phụ thuộc rất nhiều vào các tổ chức toán học mà sách giáo khoa đưa ra. Trong những tình huống không quen thuộc, học sinh tỏ ra lúng túng và thường không đưa ra được lời giải đúng hoặc không giải quyết được. Một điều cần chú ý nữa là trong quá trình giảng dạy cần chỉ ra ý nghĩa của các đối tượng toán học cũng như mối liên hệ giữa chúng. Chỉ có như vậy, học sinh mới có thể nhận ra được bản chất của toán học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bessot, A., Comiti, C., Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiên, 2010. Những yếu tố cơ bản của Didactic toán. NXB Đại học quốc gia TP. Hồ Chí Minh.
2. Đoàn Quỳnh & ctv, 2012a. Giải tích 12 nâng cao. NXB Giáo dục Hà Nội.
3. Đoàn Quỳnh và ctv, 2012b. Giải tích 12 nâng cao - Sách giáo viên. NXB Giáo dục Hà Nội.
4. Nguyễn Huy Đoan và ctv., 2012. Bài tập Giải tích 12 – nâng cao. NXB Giáo dục Hà Nội.
5. Trần Văn Hạo và ctv, 2012a. Giải tích 12. NXB Giáo dục Hà Nội.
6. Trần Văn Hạo và ctv, 2012b. Giải tích 12 - Sách giáo viên. NXB Giáo dục Hà Nội.
7. Nguyễn Phú Lộc và Diệp Văn Hoàng, 2014. Tổ chức toán học đối với định sin: một khảo sát theo cách tiếp cận nhân chủng học trong Didactic toán (Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Cần Thơ (nhận đăng)).
8. Vũ Tuấn và ctv, 2012. Bài tập Giải tích 12. NXB Giáo dục Hà Nội.