

## PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN TRONG TÍNH TOÁN HỆ KHUNG VÒM TRÒN

Lâm Thanh Quang Khải

Bộ môn Xây dựng, Trường Đại học Cửu Long

### Thông tin chung:

Ngày nhận: 22/08/2015

Ngày chấp nhận: 25/02/2016

### Title:

Finite element method applied in circular arch calculation

### Từ khóa:

Vòm, kết cấu khung, ma trận độ cứng, thanh cong, phương pháp phần tử hữu hạn

### Keywords:

Arch, frame structure, stiffness matrix, curved bar, finite element method

### ABSTRACT

Although calculating the frame structure (column and beam) has become quite simple, it is very complicated to calculate the vaulting system (column and arch) due to the development of the stiffness matrix for the arch. Depending on the shape of the arch under consideration, e.g., circular shape, parabolic shape or cycloid shape, different stiffness matrix will be developed. In this paper, the stiffness matrix for a circular arch was developed based on the the state equations at its two ends and finite element method was applied in calculating a circular arch that was subjected to static loads.

### TÓM TẮT

Tuy tính toán hệ kết cấu khung (cột và dầm ngang) đã trở nên khá đơn giản nhưng hệ khung vòm (cột và vòm) lại phức tạp do phải xây dựng ma trận độ cứng cho vòm. Tùy thuộc vào vòm đang xét là vòm tròn, vòm parabol, vòm cycloid... mà có ma trận độ cứng khác nhau. Trong bài báo này, tác giả đã xây dựng ma trận độ cứng cho phần tử vòm tròn từ phương trình trạng thái tại 2 đầu của thanh cong, là cơ sở để xây dựng ma trận độ cứng cho các loại vòm cong khác và dùng phương pháp phần tử hữu hạn để tính nội lực cho hệ khung vòm tròn chịu tải trọng tĩnh.

Trích dẫn: Lâm Thanh Quang Khải, 2016. Phương pháp phần tử hữu hạn trong tính toán hệ khung vòm tròn. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 42a: 1-6.

## 1 ĐẶT VẤN ĐỀ

Kết cấu thanh cong được sử dụng ngày càng rộng rãi từ ngành xây dựng dân dụng đến các ngành giao thông như: những mái vòm của các công chèo, vòm cuốn trong các công trình văn hóa nghệ thuật, cung điện, nhà thờ, các loại cầu vòm, cầu dẫn trong các cảng hàng không, bến tàu hoặc cầu vượt trên cạn...

Để đơn giản hóa quá trình tính toán các thanh cong ta thường sử dụng tính xấp xỉ bằng việc thay thế các thanh cong bằng các đoạn thẳng gãy khúc. Tuy nhiên, sự rời rạc hóa các đoạn thẳng của thanh cong dẫn đến độ chính xác không cao. Vì vậy trong bài báo này, tác giả không dùng phương pháp xấp

xi trong sơ đồ tính và cũng không dùng xấp xỉ đa thức mà các phương pháp số khác vẫn thường hay sử dụng. Khi phân tích kết cấu, tác giả dùng trực tiếp phương trình giải tích của trục cong.

## 2 NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

Từ nghiên cứu của tài liệu Lâm Thanh Quang Khải và Nguyễn Trâm, 2011 [3] và các tài liệu [1] [2], ta xây dựng được phương trình trạng thái tại 2 đầu thanh cong bất kỳ:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{P}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}_{12}^U] & [\mathbf{A}_2^{*T}]^{-1} \int [\mathbf{B}] ds [\mathbf{A}_1]^{-1} \\ 0 & -[\mathbf{A}_{12}^P] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{P}_1 \end{Bmatrix}$$

Từ công thức (2.34) của tài liệu [3] ta thấy:  
 $\{E_j\} = [T_{ij}]\{E_i\}$

$$\Rightarrow \{E_j\} = \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} T_{uu} & T_{up} \\ T_{pu} & T_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix}_i = [T_{ij}]\{E_i\} \quad (2.1)$$

Với:

$$[T_{uu}] = [A^U_{ij}]$$

$$[T_{up}] = [A^{*T}_j]^{-1} \int [B] ds [A_i]^{-1}$$

$$[T_{pu}] = 0 \quad [T_{pp}] = -[A^P_{ij}]$$

Trong đó: T: ma trận đặc trưng cho phần tử con;  $E_i, E_j$ : vecto trạng thái tại đầu i và j

$T_{uu}, T_{up}, T_{pu}, T_{pp}$ : ma trận chia khối

Sau khi biến đổi (2.1) ta được:

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{up}^{-1} T_{uu} & T_{up}^{-1} \\ T_{pu} & -T_{pp} T_{up}^{-1} T_{uu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}$$

Tóm lại ta có ma trận độ cứng K của phần tử vòm sau khi biến đổi:  $K_{ij} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (2.2)$

Trong đó:

$$[k_{11}] = -[T_{up}]^{-1} [T_{uu}] = -[A_i] \int [B]^{-1} ds [A_j^{*T}] [A^U_{ij}] = -[A_i] \int [B]^{-1} ds [A_i^{*T}]$$

$$[k_{22}] = [T_{pp}] [T_{up}^{-1}] = -[A^P_{ij}] [A_i] \int [B]^{-1} ds [A_j^{*T}] = -[A_j] \int [B]^{-1} ds [A_j^{*T}]$$

Ma trận dạng  $[A_i] = \begin{bmatrix} 1 & y_i & -x_i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_1 & A_i \\ 0 & 1_2 \end{bmatrix}$  với  $[A_i] = [y_i \quad -x_i] \quad (i=1 \div 2)$

$$[A^P_{12}] = \begin{bmatrix} 1 & (y_2 - y_1) & -(x_2 - x_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_1 & A_{12} \\ 0 & 1_2 \end{bmatrix} \text{ với } [A_{12}] = \begin{Bmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{Bmatrix}^T$$

$$[H_P] = \begin{bmatrix} \cos x'_x & \cos y'_x \\ \cos x'_y & \cos y'_y \end{bmatrix} \quad [H_M] = [\cos z'_z]$$

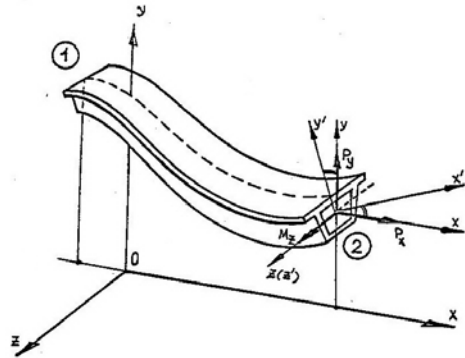
Do đó:  $[H^*] = \begin{bmatrix} H_P & 0 \\ 0 & H_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x'_x & \cos y'_x & 0 \\ \cos x'_y & \cos y'_y & 0 \\ 0 & 0 & \cos z'_z \end{bmatrix}$

$$[k_{12}] = [T_{up}]^{-1} = [A_i] \int [B]^{-1} ds [A_j^{*T}]$$

$$[k_{21}] = [T_{pu}] - [T_{pp}] [T_{up}^{-1}] [T_{uu}] = -[k_{22}] [T_{uu}] = -[A_j] \int [B]^{-1} ds [A_i^{*T}]$$

### 2.1 Phần tử vòm phẳng

Vòm phẳng có trục nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Trong bài toán phẳng một số thành phần trong vecto trạng thái sẽ bằng không, do đó ma trận sẽ giảm kích thước từ 12x12 xuống còn 6x6.



Hình 1: Phần tử vòm phẳng tổng quát

Các vecto  $\{P\}$  và  $\{U\}$  mỗi vecto chỉ còn 3 thành phần:

$$\{P\} = [M_z \quad P_x \quad P_y]^T$$

$$\{U\} = [u_x \quad u_y \quad \omega_z]^T$$

Trong đó các thành phần  $P_z, M_x, M_y, u_z, \omega_x, \omega_y$  không có, do đó các hàng và cột tương ứng trong các ma trận đặc trưng có thể loại bỏ.

Mặt khác ta có :

$$\begin{cases} \cos x'x = \cos y'y = \frac{dx}{ds} \\ -\cos y'x = \cos x'y = \frac{dy}{ds} \\ \cos z'z = 1 \end{cases} \Rightarrow [H^*]^{-1} = [H^*]^T = \begin{bmatrix} x'_s & y'_s & 0 \\ -y'_s & x'_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận  $[H^*]$  có thể biểu diễn thông qua đạo hàm  $x'_s = \frac{dx}{ds}$  và  $y'_s = \frac{dy}{ds}$

$$[H^*] = \begin{bmatrix} x'_s & -y'_s & 0 \\ y'_s & x'_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M_p] = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & \frac{(ds)^2}{12EI_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Do}$$

$$\left( \frac{(ds)^2}{12EI_z} \approx 0 \right)$$

$$[M_M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{EI_z} \end{bmatrix}$$

Do ma trận  $[H^*]$  là ma trận vuông phản xứng nên có tính chất sau:

$$[H_p]^{-1} = [H_p]^T \quad \text{và} \quad [H_M]^{-1} = [H_M]^T$$

$$[M_p] = [H_p][M_p][H_p]^T = \begin{bmatrix} \frac{(x'_s)^2}{EA} & \frac{x'_s \cdot y'_s}{EA} \\ \frac{x'_s \cdot y'_s}{EA} & \frac{(y'_s)^2}{EA} \end{bmatrix}$$

$$[M_M] = [H_M][M_M][H_M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{EI_z} \end{bmatrix} \quad [M_M][A] = \begin{bmatrix} \frac{y}{EI_z} & -\frac{x}{EI_z} \end{bmatrix}$$

Các ma trận con của  $[B]$  có dạng :

$$[A]^T [M_M] = \begin{bmatrix} \frac{y}{EI_z} \\ -\frac{x}{EI_z} \end{bmatrix} \quad [A]^T [M_M][A] = \begin{bmatrix} \frac{y^2}{EI_z} & -\frac{xy}{EI_z} \\ -\frac{xy}{EI_z} & \frac{x^2}{EI_z} \end{bmatrix}$$

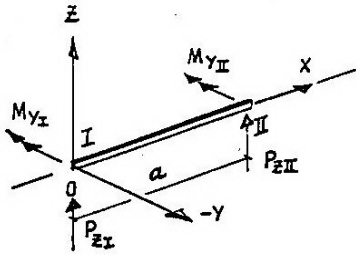
$$[M_p] + [A]^T [M_M][A] = \begin{bmatrix} \frac{(x'_s)^2}{EA} + \frac{y^2}{EI_z} & \frac{x'_s \cdot y'_s}{EA} - \frac{xy}{EI_z} \\ \frac{x'_s \cdot y'_s}{EA} - \frac{xy}{EI_z} & \frac{(y'_s)^2}{EA} + \frac{x^2}{EI_z} \end{bmatrix}$$

Ghép vào, ta được ma trận  $[B]$ :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{y}{EI_z} & \frac{(x'_s)^2}{EA} + \frac{y^2}{EI_z} & \frac{x'_s \cdot y'_s}{EA} - \frac{xy}{EI_z} \\ -\frac{x}{EI_z} & \frac{x'_s \cdot y'_s}{EA} - \frac{xy}{EI_z} & \frac{(y'_s)^2}{EA} + \frac{x^2}{EI_z} \\ \frac{1}{EI_z} & \frac{y}{EI_z} & -\frac{x}{EI_z} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

**2.2 Phần tử thanh chịu uốn**

Xét phần tử thẳng (Hình 2), phần tử có 2 bậc tự do ở mỗi đầu



**Hình 2: Phần tử thanh thẳng**

Ta có:

$$T_{uu} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{up} = \frac{a}{EI} \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} & -\frac{a^2}{6} \\ 0 & \frac{a}{2} \end{bmatrix}$$

$$T_{pp} = \frac{a}{EI} \begin{bmatrix} -1 & -a \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận độ cứng K của phần tử thanh thẳng:

$$k_{12} = T_{up}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} \\ \frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} \end{bmatrix}$$

$$k_{11} = -T_{up}^{-1} \cdot T_{uu} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{a^2} & -\frac{4EI}{a} \\ \frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} \end{bmatrix}$$

$$k_{22} = T_{pp} \cdot T_{up}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{6EI}{a^2} & -\frac{4EI}{a} \\ \frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} \end{bmatrix}$$

$$k_{21} = -k_{22} \cdot T_{uu} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} \\ \frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} \end{bmatrix}$$

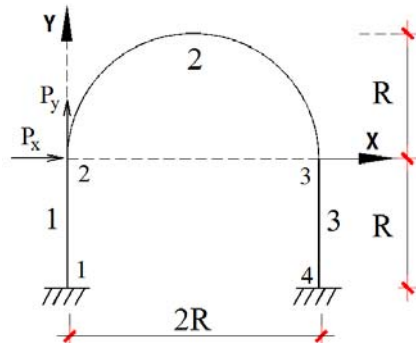
$$\Rightarrow K = \frac{2EI}{a} \begin{bmatrix} \frac{3}{a} & -2 & -\frac{3}{a} & -1 \\ -\frac{6}{a^2} & \frac{3}{a} & \frac{6}{a^2} & \frac{3}{a} \\ \frac{3}{a^2} & -1 & -\frac{3}{a^2} & -2 \\ \frac{6}{a^2} & -\frac{3}{a} & -\frac{6}{a^2} & -\frac{3}{a} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

=> Ta thấy (2.4) hoàn toàn giống trong các tài liệu đã xuất bản.

Ma trận độ cứng của phần tử thanh thẳng đứng, dẫn đến ma trận độ cứng của phần tử vòm phẳng đã lập cũng đúng (do ma trận độ cứng của phần tử thanh thẳng được suy ra từ ma trận độ cứng của phần tử vòm phẳng).

**2.3 Hệ khung vòm tròn**

Xét hệ khung phẳng có thanh trên dạng vòm tròn, vòm có trục nằm trong mặt phẳng tọa độ 0xy, chân cột đứng của khung bị ngàm chặt, chịu tải trọng tác dụng như hình vẽ (Hình 3).



**Hình 3: Hệ khung vòm tròn**

Phương trình chính tắc của vòm tròn:

$$\begin{cases} x = R - R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Ta có:  $\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = R$

$$x'_s = \frac{x'_\varphi}{s'_\varphi} = \frac{R \sin \varphi}{R} = \sin \varphi$$

$$y'_s = \frac{y'_\varphi}{s'_\varphi} = \frac{R \cos \varphi}{R} = \cos \varphi$$

Ma trận dạng B:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{y}{EI} & \left( \frac{(x'_s)^2}{EA} + \frac{y^2}{EI} \right) & \left( \frac{x'_s \cdot y'_s}{EA} - \frac{x \cdot y}{EI} \right) \\ -\frac{x}{EI} & \left( \frac{x'_s \cdot y'_s}{EA} - \frac{x \cdot y}{EI} \right) & \left( \frac{(y'_s)^2}{EA} + \frac{x^2}{EI} \right) \\ \frac{1}{EI} & \frac{y}{EI} & -\frac{x}{EI} \end{bmatrix}$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{y}{EI} ds = \int_0^{\pi} \frac{R \sin \varphi}{EI} \cdot R d\varphi = \frac{2R^2}{EI} \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{x}{EI} ds = \frac{R^2}{EI} \int_0^{\pi} (1 - \cos \varphi) d\varphi = \frac{\pi R^2}{EI}$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{EI} ds = \int_0^{\pi} \frac{1}{EI} \cdot R d\varphi = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi} d\varphi = \frac{\pi R}{EI} \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{(x'_s)^2}{EA} ds = \frac{R}{EA} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi R}{2EA}$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{(y'_s)^2}{EA} ds = \frac{R}{EA} \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi R}{2EA} \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{x'_s \cdot y'_s}{EA} ds = \frac{R}{EA} \int_0^{\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{x \cdot y}{EI} ds = \frac{R^3}{EI} \int_0^{\pi} (1 - \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{2R^3}{EI} \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{x^2}{EI} ds = \frac{R^3}{EI} \int_0^{\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi R^3}{2EI}$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{y^2}{EI} ds = \frac{R^3}{EI} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi R^3}{2EI}$$

$$\Rightarrow [B] = \int_0^{\pi} [B] ds = \begin{bmatrix} \frac{2R^2}{EI} & \frac{\pi R}{2EA} + \frac{\pi R^3}{2EI} & -\frac{2R^3}{EI} \\ -\frac{\pi R^2}{EI} & -\frac{2R^3}{EI} & \frac{\pi R}{2EA} + \frac{3\pi R^3}{2EI} \\ \frac{\pi R}{EI} & \frac{2R^2}{EI} & -\frac{\pi R^2}{EI} \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận độ cứng k của phần tử vòm, với k là ma trận 6x6:

$$k_2 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$[k_{11}] = -[A_i] \int [B]^{-1} ds [A_i^{*T}] = -[B]^{-1}$$

$$[k_{22}] = -[A_{ii}] \int [B]^{-1} ds [A_{ii}^{*T}] = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2R \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [B]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k_{12}] = [A_i] \int [B]^{-1} ds [A_{ii}^{*T}] = [B]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k_{21}] = [A_{ii}] \int [B]^{-1} ds [A_i^{*T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2R \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [B]^{-1}$$

**Ví dụ:** Giả sử cho hệ khung vòm tròn như (Hình 3). Cho  $R=3m$ ,  $P_x = P_y = 10kN$ ,  $E = 210 \times 10^6$  ( $kN/m^2$ ),  $A = 0.02$  ( $m^2$ ),  $I = 5.10^{-5}$  ( $m^4$ ). Tìm chuyển vị thẳng và chuyển vị xoay tại nút 2, 3. Vẽ biểu đồ lực dọc, lực cắt, mô men uốn của mỗi phần tử.

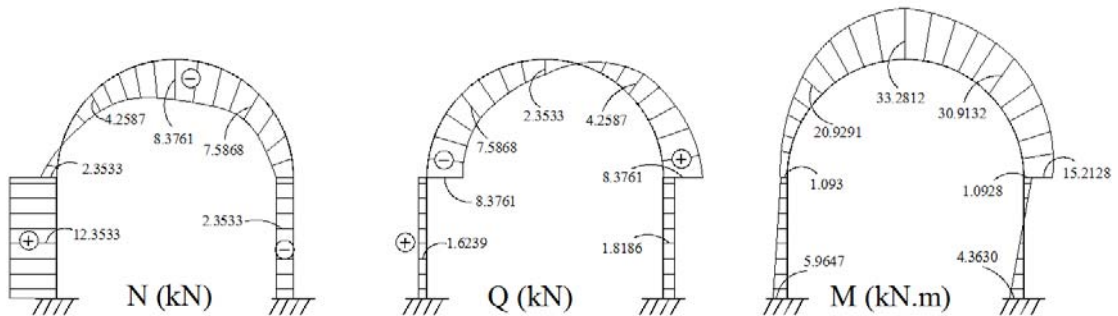
**Giải:**

Ta có phương trình phân tử hữu hạn của hệ:  $[K]\{U\} = \{F\}$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} U_{2x} \\ U_{2y} \\ \phi_2 \\ U_{3x} \\ U_{3y} \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0019 \\ 0.0000 \\ -0.0010 \\ 0.0011 \\ -0.0000 \\ -0.0005 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} m \\ m \\ rad \\ m \\ m \\ rad \end{Bmatrix}$$

(sang phải)  
(hướng lên)  
(xoay cùng chiều kim đồng hồ)  
(sang phải)  
(hướng xuống)  
(xoay cùng chiều kim đồng hồ)

Biểu đồ lực dọc, lực cắt và mô men uốn của hệ:



**Hình 4: Biểu đồ nội lực hệ khung vòm tròn**

### 3 KẾT LUẬN

Trên cơ sở ma trận  $[B]$ , ta có thể xây dựng ma trận độ cứng cho các phần tử vòm khác nhau. Phương pháp này rất hiệu quả và chính xác mà không cần xấp xỉ thành cong thành các đoạn thẳng gãy khúc.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

Lâm Thanh Quang Khải, 2013. Xây dựng bài toán dầm cong phẳng dạng vòm parabol chịu tải trọng phân bố đều. Tạp chí Xây dựng ISSN 0866-0762, số tháng 1/2013.

Các điều kiện biên:

$$U_{1x} = U_{1y} = \phi_1 = U_{4x} = U_{4y} = \phi_4 = 0 \text{ (tại ngàm)}$$

$$M_2 = F_{3x} = F_{3y} = M_3 = 0 \quad F_{2y} = F_{2y} = 10$$

Giá trị cần tìm là các chuyển vị thẳng và chuyển vị xoay tại nút 2, 3 nên ma trận con của K được lấy từ hàng 4 ÷ 9 và từ cột 4 ÷ 9.

Giải hệ phương trình trên, ta được các chuyển vị thẳng và chuyển vị xoay tại nút 2, 3:

Lâm Thanh Quang Khải, 2013. Xác định nội lực và chuyển vị đứng vòm cycloid chịu nhiều tải trọng tập trung. Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng ISSN 1859-1566, số 1/2013

Lâm Thanh Quang Khải và Nguyễn Trâm, 2011. Ma trận của kết cấu dầm cong chịu lực phức tạp trong không gian 3 chiều. Tạp chí Xây dựng ISSN 0866-0762, số tháng 10/2011.