Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên
website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2022.106

NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN EKELAND CHO HÀM HAI BIẾN VỚI NHIỄU TẬP

Đinh Ngọc Quý[1*], Đỗ Hồng Diễm[2] và Hà Nguyễn Huỳnh Anh[3]
[1]*Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*
[2]*Bộ môn Toán, Khoa Cơ bản, Trường Đại học Y dược Cần Thơ*
[3]*Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*
**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Đinh Ngọc Quý (email: dnquy@ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 20/05/2022
Ngày nhận bài sửa: 25/06/2022
Ngày duyệt đăng: 11/07/2022

Title:
Ekeland's variational principle for bifunctions involving set perturbations

Từ khóa:
Nguyên lý biến phân Ekeland, nhiễu tập, tính nửa liên tục dưới

Keywords:
Ekeland's variational principle, lower semicontinuity, set perturbation

ABSTRACT

In this paper, we consider Ekeland's variational principle for bifunctions defined on complete metric spaces and with values in Hausdorff locally convex spaces ordered by closed convex cones. Instead of dealing with directional perturbations in a direction of the positive cone of the image space, we perturb the map under question by a convex subset of the positive cone to get stronger and more general versions. Many example are provided to highlight the relations of our results to the existing ones, including their advantages.

TÓM TẮT

Kết quả của bài báo này là sự mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm hai biến vectơ được xét từ không gian mêtric đủ vào không gian Hausdorff lồi địa phương được trang bị thứ tự bởi một nón lồi đóng có đỉnh. Hàm mục tiêu được nhiễu bởi một tập lồi nằm trong nón thứ tự, thay thế cho nhiễu theo một hướng cố định nằm trong nón được nghiên cứu trước đây. Các hệ quả trong các trường hợp đặc biệt được đưa ra để so sánh với các kết quả nghiên cứu gần đây về vấn đề này.

1. GIỚI THIỆU

Nguyên lý biến phân Ekeland (1974) (viết tắt là EVP) là kết quả quan trọng của giải tích biến phân và lý thuyết tối ưu. Nguyên lý này có rất nhiều kết quả tương đương nổi tiếng, cụ thể như Định lý điểm bất động Caristi (1976), Định lý giọt nước rơi của Daneš (1972), Định lý cánh hoa của Penot (1986), Định lý Krasnoselski&Zabrejko (1971) về tính giải được của phương trình toán, Bổ đề Phelps (1974), v.v.

Trong những năm gần đây, nhiều tác giả cố gắng mở rộng các kết quả của EVP cho trường hợp hàm hai biến và ứng dụng vào nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng (Bianchi et al., 2005; Bianchi et al., 2007; Ansari, 2007; Al-Homidan et al., 2008; Araya et al., 2008). Sử dụng EVP để xây dựng điều kiện đủ cho tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng có ưu điểm là không cần sử dụng bất cứ giả thiết lồi cho tập xác định và ánh xạ. Đây là một cách tiếp cận mới dựa trên ý tưởng được đưa ra đầu tiên bởi Bianchi et al. (2005).

Việc xét EVP được nhiễu bởi một tập lồi nằm trong nón thứ tự của không gian ảnh, thay thế cho nhiễu theo một hướng cố định nằm trong nón dương được nghiên cứu trước đây được giới thiệu đầu tiên bởi Bednarczuk and Zagrodny (2009). Một số kết quả mở rộng EVP cho trường hợp nhiễu tập xét cho hàm đa trị một biến số cũng được đề xuất bởi Khanh and Quy (2013); Qiu and He (2020). Ứng dụng EVP đa trị với nhiễu tập để khảo sát cận sai số cho hệ bất phương trình được quan tâm bởi Li and Ng (2011).

Gần đây, trong bài báo của Hai (2021), tác giả cũng đã đưa ra dạng mở rộng EVP cho hàm 2 hai biến vectơ với nhiễu tập để nghiên cứu dạng nghiệm xấp xỉ Henig cho bài toán cân bằng với cả hai trường hợp không có ràng buộc và có ràng buộc.

Trong bài báo này, EVP cho hàm hai biến với nhiễu tập được tập trung mở rộng để nghiên cứu dạng nghiệm xấp xỉ Pareto. Đây là dạng nghiệm phổ dụng trong tối ưu và tập nghiệm xấp xỉ Pareto rộng hơn tập nghiệm xấp xỉ Henig. Kết quả mở rộng này cũng sẽ là cơ sở cho phép nghiên cứu tập nghiệm xấp xỉ Pareto, cũng như tập nghiệm chính xác của bài toán cân bằng vectơ trong thời gian tới. Hàm vectơ được xét đi từ không gian mêtric đủ vào không gian Hausdorff lồi địa phương được trang bị thứ tự bởi một nón lồi đóng có đỉnh. Các hệ quả trong nhiều trường hợp cụ thể được đưa ra để so sánh với các kết quả nghiên cứu gần đây về vấn đề này.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này, nếu không có gì đặc biệt, chúng ta luôn giả thiết (X,d) là không gian mêtric đủ và Y là không gian vectơ tôpô Hausdorff lồi địa phương được sắp thứ tự bởi nón K lồi đóng có đỉnh. Ta ký hiệu $\mathbb{R}$ là không gian thực và $\mathbb{N}$ là tập số tự nhiên.

Trước tiên, chúng ta nhắc lại các định nghĩa về tính nửa liên tục của hàm thực vô hướng.

Định nghĩa 2.1 (Aubin & Ekeland, 1984**)** Cho $f: X \to \mathbb{R}$ là hàm thực vô hướng. Khi đó ta có,

– Hàm f được gọi là nửa liên tục dưới (viết tắt là lsc) tại $\bar{x}$ nếu

$$f(\bar{x}) \leq \liminf_{x \to \bar{x}} f(x).$$

– Hàm f được gọi là nửa liên tục dưới từng phần (viết tắt là plsc) tại $\bar{x}$ nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $\bar{x}$ sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$ thì

$$f(\bar{x}) \leq_K f(x_n), \forall n \in N.$$

Ta nói rằng f thỏa mãn một tính chất nào đó trên tập $A \subseteq X$ nếu f thỏa mãn tính chất đó tại mọi điểm của A. Nếu $A = X$ thì ta bỏ qua cụm từ "trên X" trong cách phát biểu.

Khái niệm nửa liên tục dưới từng phần là khái niệm thực sự giảm nhẹ của khái niệm nửa liên tục dưới.

Ví dụ 2.1. Cho hàm thực $f : X \to \mathbb{R}$, được định nghĩa bởi:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{khi } x < 0. \\ 2, & \text{khi } x = 0. \\ x+3, & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

khi đó dễ dàng kiểm tra được f là plsc tại $x = 0$ nhưng không lsc tại $x = 0$.

Dưới đây là các đặc trưng cơ bản của một hàm nửa liên tục dưới.

Mệnh đề 2.1 (Aubin & Ekeland, 1984**)** Cho X là không gian metric và hàm thực $f : X \to \mathbb{R}$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

– Hàm f là hàm nửa liên tục dưới trên X;

– Tập trên đồ thị $\operatorname{epi} f = \{(x,a) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq a\}$ là tập đóng trong $X \times \mathbb{R}$;

– Tập mức dưới $\operatorname{lev}_{\leq a} f = \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ là tập đóng trong X với mọi $a \in \mathbb{R}$.

Mở rộng cho tính nửa liên tục dưới cho hàm vectơ được đưa ra dưới đây

Định nghĩa 2.2 (Borwein et al., 1984) Cho $f: X \to Y$. Khi đó,

(i) f được gọi là K-nửa liên tục dưới (K-lsc) tại $\bar{x}$ nếu với bất kỳ lân cận V của 0 trong Y, tồn tại một lân cận U của $\bar{x}$ sao cho $f(x) \in f(\bar{x}) + V + K$, $\forall x \in U$.

(ii) f được gọi là giả K-nửa liên tục dưới (qK-lsc) tại $\bar{x}$ nếu với bất kỳ $e \in Y$ với $e \notin f(\bar{x}) + K$, tồn tại một lân cận U của $\bar{x}$ sao cho $e \notin f(x) + K$, $\forall x \in U$.

Mệnh đề 2.2 (Borwein et al., 1984) Cho $f: X \to Y$.

Khi đó:

f is qK-lsc nếu và chỉ nếu tập mức $\{x \in X : f(x) \leq_K e\}$ đóng với mọi $e \in Y$.
(ii) Nếu f là K-lsc tại x, thì f là qK-lsc tại x.

Ví dụ 2.2 (Mệnh đề đảo của Mệnh đề 2.2(ii) không đúng) Cho $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}^2_+$, và

$$f(x) = \begin{cases} \{(x,1)\} & \text{if } x \leq 0, \\ \left\{\left(\frac{1}{x}, 0\right)\right\} & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

Khi đó, f là q$\mathbb{R}^2_+$-lsc nhưng không $\mathbb{R}^2_+$-lsc tại $\bar{x} = 0$.

Định nghĩa 2.3 (Khanh & Quy, 2010) Cho $f: X \to Y$ và $\bar{x} \in X$. Khi đó, f được gọi là K-nửa liên tục dưới từng phần (K-lsca) tại $\bar{x}$ nếu, với mỗi dãy $\{x_n\} \to \bar{x}$ thỏa $f(x_{n+1}) \leq_K f(x_n)$ với mọi n, chúng ta có

$$f(\bar{x}) \leq_K f(x_n),\ \forall n$$

Mệnh đề 2.3 (Khanh & Quy, 2010) Cho $f: X \to Y$ và $\bar{x} \in X$. Khi đó, nếu f là qK-lsc tại $\bar{x}$, thì f là K-lsca tại $\bar{x}$.

Dưới đây, chúng ta nhắc lại các khái niệm về tính bị chặn của một tập bởi nón thứ tự K.

Định nghĩa 2.3 (Gopfert et al., 2003) Cho tập $A \subset Y$. Khi đó,

– Tập A được gọi là bị chặn nếu với mọi U là lân cận mở chứa 0_Y, tồn tại số thực đủ lớn α sao cho $A \subseteq \alpha U$.

– Tập A là được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại $\bar{y} \in Y$ sao cho sao cho $A \subseteq \bar{y} + K$.

– Tập A là được gọi là tựa bị chặn dưới nếu tồn tại một tập bị chặn $M \subseteq Y$ sao cho $A \subseteq M + K$.

– Tập A là được gọi là bị chặn dưới yếu nếu tồn tại $\bar{y} \in Y$ sao cho sao cho $A \cap (\bar{y} - K) = \emptyset$.

Từ Định nghĩa 2.3, ta có tính bị chặn dưới thì suy ra tính tựa bị chặn dưới, tính tựa bị chặn dưới thì suy ra tính bị chặn dưới yếu. Tuy nhiên, chiều ngược lại thì không đúng.

Ví dụ 2.3. Cho $Y = \mathbb{R}^2, K = \{(k, 0) \in \mathbb{R}^2 | k \geq 0\}$, khi đó tập $A = \{(0, a) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq a \leq 1\}$ là tựa bị chặn dưới nhưng không bị chặn dưới.

Ví dụ 2.4. Trong trường hợp $Y = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}^2_+$, khi đó tập $A = \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 | a \in \mathbb{R}\}$ là bị chặn dưới yếu nhưng không bị chặn dưới và tựa bị chặn dưới.

Phần còn lại của mục này là định nghĩa quan hệ hai ngôi trên X có tính chất đóng dưới và Bổ đề tồn tại phần tử tối tiểu của quan hệ hai ngôi được đưa ra bởi Khanh and Quy (2010).

Định nghĩa 2.4 (Khanh & Quy, 2010) Cho $\mathfrak{R}$ là một quan hệ hai ngôi trên X có tính phản xạ và bắc cầu. Khi đó:

– Dãy $\{x_n\} \subseteq X$ gọi là dãy giảm ứng với quan hệ $\mathfrak{R}$ nếu $x_{n+1} \mathfrak{R} x_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

– Dãy $\{x_n\} \subseteq X$ gọi là dãy tiệm cận nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

– Quan hệ $\mathfrak{R}$ được gọi là có tính đóng dưới nếu với mọi dãy giảm $\{x_n\}$ hội tụ đến $\bar{x}$ thì $\bar{x} \mathfrak{R} x_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

– Tập mức dưới của x ứng với quan hệ $\mathfrak{R}$ được ký hiệu là $S_{\mathfrak{R}}(x)$, định nghĩa bởi

$$S_{\mathfrak{R}}(x) := \{x' \in X | x' \mathfrak{R} x\}.$$

Bổ đề 2.1 (Khanh & Quy, 2010) Cho $\mathfrak{R}$ là một quan hệ phản xạ bắc cầu trên X có tính đóng dưới. Với $x_0 \in X$, nếu mọi dãy giảm $\{x_n\} \subseteq S_{\mathfrak{R}}(x_0)$ đều là dãy tiệm cận thì tồn tại $\bar{x} \in S_{\mathfrak{R}}(x_0)$ sao cho $S_{\mathfrak{R}}(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$.

3. NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN EKELAND

Trong phần này, kết quả mở rộng của EVP cho hàm hai biến với trường hợp nhiễu tập được đưa ra.

Định lý 3.1 Cho (X, d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian vectơ tôpô Hausdorff lồi địa phương được sắp thứ tự bởi nón K lồi đóng có đỉnh và D là tập con lồi của nón K thỏa $0 \notin \mathrm{cl}(D + K)$. Cho $f: X \times X \to Y$ là hàm hai biến. Ta định nghĩa quan hệ $\leq_D$ trên X bởi

$$x_2 \leq_D x_1 \Leftrightarrow f(x_1, x_2) + d(x_1, x_2)D \subset -K.$$

Với $x_0 \in X$, giả sử các điều điều kiện dưới đây thỏa mãn:

– $f(x, x) = 0_Y$ với mọi $x \in X$;

– $f(x, z) \leq_K f(x, y) + f(y, z)$ với mọi $\forall x, y, z \in X$ thỏa $f(x, y) \leq_K 0_Y$ và $f(y, z) \leq_K 0_Y$;

– $f(x_0, S_{\leq_D}(x_0))$ là tựa bị chặn dưới ;

– Quan hệ $\leq_D$ có tính đóng dưới.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho

– $f(x_0, \bar{x}) + d(x_0, \bar{x})D \subset -K$;

– $f(\bar{x}, x) + d(\bar{x}, x)D \not\subset -K, \forall x \neq \bar{x}$.

Chứng minh

Trước tiên, dựa vào tính lồi của D, chúng ta chứng minh đẳng thức sau, với mọi $x, y, z \in X$ thì

$$d(x, y)D + d(y, z)D = \big(d(x, y) + d(y, z)\big)D.$$

Thật vậy, lấy $a \in (d(x, y) + d(y, z))D$. Khi đó, tồn tại $d \in D$ sao cho $a = \big(d(x, y) + d(y, z)\big)d = d(x, y)d + d(y, z)d \in d(x, y)D + d(y, z)D$. Do đó,

$$(d(x, y)d + d(y, z)d')D \subset d(x, y)D + d(y, z)D.$$

Ngược lại, lấy $a \in d(x, y)D + d(y, z)D$. Khi đó, tồn tại $d, d' \in D$ sao cho $a = d(x, y)d + d(y, z)d'$. Nếu $d(x, y) = 0$ hoặc $d(y, z) = 0$, ta dễ dàng thấy $a \in \big(d(x, y) + d(y, z)\big)D$. Nếu $d(x, y) \neq 0$ và $d(y, z) \neq 0$ thì, bởi tính lồi của D, ta có

$$\frac{d(x, y)}{d(x, y) + d(y, z)} d + \frac{d(y, z)}{d(x, y) + d(y, z)} d' \in D.$$

Từ đó kéo theo, $a = d(x, y)d + d(y, z)d' \in \big(d(x, y) + d(y, z)\big)D$. Do đó,

$$d(x,y)D + d(y,z)D \subset \big(d(x,y) + d(y,z)\big)D.$$

Vậy đẳng thức được chứng minh xong.

Tiếp tục, ta sẽ kiểm tra quan hệ $\leq_D$ có tính phản xạ và bắc cầu. Từ (i) và $d(x,x) = 0$ nên ta có $x \leq_D x$ với mọi $x \in X$, tức là quan hệ $\leq_D$ có tính phản xạ. Bây giờ, giả sử $x \leq_D y$ và $y \leq_D z$. Theo định nghĩa của quan hệ $\leq_D$, ta có

$$f(x,y) + d(x,y)D \subset -K,$$

$$f(y,z) + d(y,z)D \subset -K.$$

Từ đó, kéo theo $f(x,y) \leq_K 0_Y$ và $f(y,z) \leq_K 0_Y$. Do đó, kết hợp với điều kiện (ii), bất đẳng thức tam giác của mêtric $d(.,.)$ và đẳng thức vừa chứng minh trên dựa vào tính lồi của tập D, ta được đánh giá sau:

$$f(x,z) + d(x,z)D$$
$$\subset \big(f(x,y) + f(y,z)\big) + \big(d(x,y) + d(y,z)\big)D - K$$
$$\subset \big(f(x,y) + d(x,y)\big)D + (f(y,z) + d(y,z)D) - K$$
$$\subset -K.$$

Suy ra $x \leq_D z$. Vậy quan hệ $\leq_D$ có tính bắc cầu.

Để áp dụng Bổ đề 2.1, ta cần kiểm tra thêm điều kiện mọi dãy giảm $\{x_n\} \subseteq S_D(x_0)$ theo quan hệ $\leq_D$ đều là dãy tiệm cận.

Trước hết, nhận xét rằng, vì $0 \notin \mathrm{cl}(D+K)$, theo Định lý tách, tồn tại $z^* \in Y^* \setminus \{0\}$ sao cho $z^*(d) + z^*(k) > 0$ với mọi $d \in D, k \in K$. Suy ra, $\inf_{d\in D} z^*(d) > 0$ và $z^*(k) \geq 0$ với mọi $k \in K$.

Với $\{x_n\}$ là dãy giảm và định nghĩa quan hệ $\leq_D$, ta có,

$$f(x_n, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1})D \subset -K, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dựa vào tính bắc cầu của quan hệ $\leq_D$, kéo theo $x_n \leq_D x_0$, tức là,

$$f(x_0, x_n) + d(x_0, x_n)D \subset -K, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do đó, $f(x_n, x_{n+1}) \leq_K 0_Y$ và $f(x_0, x_n) \leq_K 0_Y$. Kết hợp với điều kiện (ii), ta có:

$$f(x_0, x_{n+1}) - f(x_0, x_n) \leq_K f(x_n, x_{n+1}).$$

Suy ra, , $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f(x_0, x_{n+1}) - f(x_0, x_n) + d(x_n, x_{n+1})D$$
$$\subseteq f(x_n, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1})D - K \subseteq -K.$$

Vì $f(x_n, x_{n+1}) \in -K$, nên

$$f(x_0, x_{n+1}) \leq_K f(x_0, x_n).$$

Suy ra $\{z^*\big(f(x_0, x_n)\big)\}$ là dãy giảm. Bởi (iii), nên $\{z^*\big(f(x_0, x_n)\big)\}$ bị chặn dưới. Do đó, ta có dãy $\{z^*\big(f(x_0, x_n)\big)\}$ hội tụ.

Khi đó, ta có

$$0 \leq d(x_n, x_{n+1}) \inf_{d\in D} z^*(d)$$
$$\leq z^*\big(f(x_0, x_n)\big) - z^*\big(f(x_0, x_{n+1})\big) \to 0.$$

Vì $\inf_{d\in D} z^*(d) > 0$, nên $\{d(x_n, x_{n+1})\} \to 0$, tức là $\{x_n\}$ là dãy tiệm cận.

Áp dụng Bổ đề 2.1, tồn tại $\bar{x} \in S_{\leq D}(x_0)$ sao cho $S_{\leq_D}(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$. Do đó (a) và (b) đúng. ■

Nhận xét 3.1 Trong Định lý 3.1, ta có thể giảm nhẹ điều kiện (iii) bởi điều kiện (iii') dưới đây

(iii') $f(x_0, S_{\leq_{k_0}}(x_0))$ là bị chặn dưới yếu.

Thật vậy, ta chứng minh tương tự như trong chứng minh Định lý 3.1, trong đó ta chỉ cần thay hàm tuyến tính z^* bằng hàm dưới tuyến tính $\varphi_D: Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, được định nghĩa bởi

$$\varphi_D(v) := \inf\{t \in \mathbb{R}: v \in tD - K\}.$$

Đây là một dạng tổng quát của hàm dưới tuyến tính Gerstewitz được đề xuất bởi Qiu and He (2020).

Bên cạnh đó, ta cũng có thể giảm nhẹ điều kiện (iii) và (iii') bởi các điều kiện bị chặn dưới bởi hàm hàm tuyến tính z^* hoặc bằng hàm dưới tuyến tính φ_D. Tuy nhiên, việc sử dụng các điều kiện bị chặn dưới cho hàm f sẽ dễ dàng kiểm tra hơn so với các điều kiện bị chặn dưới bởi hàm z^* và φ_D.

Dưới đây là một số điều kiện đủ cho phép chúng ta kiểm tra tính đóng dưới của quan hệ $\leq_D$.

Mệnh đề 3.2 Cho X, Y, K, D và f thỏa (i)-(ii) như trong Định lý 3.1. Khi đó quan hệ $\leq_D$ có tính chất đóng dưới nếu một trong các điều kiện dưới đây thỏa mãn.

(i) $S_{\leq_D}(x)$ là tập đóng với mọi $x \in X$.

(ii) f có tính chất, với mọi dãy $\{x_n\} \to \bar{x}$ mà $f(x_n, x_{n+1}) \in -K$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì $f(x_n, \bar{x}) \in -K$.

Chứng minh

(i) Hiển nhiên.

(ii) Lấy $x_{n+1} \leq_D x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $x_n \to \bar{x}$. Cố định n. Khi đó, với $i \in \mathbb{N}$ đủ lớn, bởi tính liên tục của $d(x_n, .)$, tồn tại $Q(i) \in \mathbb{N}$ sao cho, $\forall q > Q(i)$,

$$d(x_n, x_{n+q}) \geq d(x_n, \bar{x}) - \frac{1}{i}.$$

Suy ra,

$$f(x_n, x_{n+q}) + \left(d(x_n, \bar{x}) - \frac{1}{i}\right)D \subseteq f(x_n, x_{n+q}) + d(x_n, x_{n+q})D - K$$

Vì $x_{n+q} \leq_{k_0} x_n$, kéo theo

$$f(x_n, x_{n+q}) + \left(d(x_n, \bar{x}) - \frac{1}{i}\right)D \subseteq -K. \quad (1)$$

Bởi (ii),

$$f(x_n, \bar{x}) \leq_K f(x_n, x_{n+q}) + f(x_{n+q}, \bar{x})$$

Theo giả thiết, với $f(x_n, x_{n+1}) \in -K$, với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $\{x_n\} \to \bar{x}$, kéo theo $f(x_{n+q}, \bar{x}) \in -K$. Do đó,

$$f(x_n, \bar{x}) \leq_K f(x_n, x_{n+q}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có

$$f(x_n, \bar{x}) + \left(d(x_n, \bar{x}) - \frac{1}{i}\right)D \subseteq -K$$

Cho $i \to \infty$, chúng ta thu được

$$f(x_n, \bar{x}) + d(x_n, \bar{x})D \subseteq -K,$$

tức là, $\bar{x} \leq_D x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. ■

Từ Định lý 3.1, Mệnh đề 3.2, ta dễ dàng suy ra các hệ quả dưới đây.

Hệ quả 3.3 Cho (X, d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian vectơ tôpô Hausdorff lồi địa phương được sắp thứ tự bởi nón K lồi đóng có đỉnh và D là tập con lồi của nón K thỏa $0 \notin \mathrm{cl}(D + K)$. Cho $f: X \times X \to Y$ là hàm hai biến. Với các số thực dương ε và λ cho trước, giả sử các điều điều kiện dưới đây thỏa mãn:

$(i) f(x, x) = 0_Y$ với mọi $x \in X$.

$(ii) f(x, z) \leq_K f(x, y) + f(y, z)$ với mọi x, y, z.

(iii)$f(x, S_{\leq_D}(x_0))$ là tựa bị chặn dưới với mọi $x \in X$.

(iv) Tập $\{x' \in X | f(x, x') + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, x')D \subset -K\}$ là đóng với mọi $x \in X$.

Khi đó, với mỗi $x_0 \in X$, tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho

a. $f(x_0, \bar{x}) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x_0, \bar{x})D \subset -K$.

b. $f(\bar{x}, x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(\bar{x}, x)D \not\subset -K, \forall x \neq \bar{x}$.

Hơn nữa, nếu x_0 là điểm εD-xấp xỉ cực tiểu của hàm f (tức là $f(x_0, x) + \varepsilon D \not\subset -K$ với mọi $x \in X$), thì $\bar{x}$ được chọn thỏa đánh giá $d(x_0, \bar{x}) \leq \lambda$.

Chứng minh

Dựa vào Mệnh đề 3.2(a) và Định lý 3.1 với mêtric $d(.,.)$ được thay thế bằng mêtric $\frac{\varepsilon}{\lambda} d(.,.)$, tồn tại $\bar{x} \in X$ thỏa (a) và (b).

Chúng ta tiếp tục kiểm tra $d(x_0, \bar{x}) \leq \lambda$. Giả sử $d(x_0, \bar{x}) > \lambda$. Vậy từ (a), ta có

$$f(x_0, \bar{x}) + \varepsilon D \subset f(x_0, \bar{x}) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x_0, \bar{x})D \not\subset -K.$$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện x_0 là điểm εD-xấp xỉ cực tiểu của hàm f. ■

Nhận xét 3.2 Hệ quả 3.3 là mở rộng của Định lý 2.1 trong Araya et al. (2008) và Định lý 4.1 trong Gutiérrez et al. (2017) trong trường hợp nhiễu tập.

Hệ quả 3.4 Cho (X, d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian vectơ tôpô Hausdorff lồi địa phương được sắp thứ tự bởi nón K lồi đóng có đỉnh và D là tập con lồi của nón K thỏa $0 \notin \mathrm{cl}(D + K)$. Cho $g: X \to Y$ là hàm K-lsca và tựa bị chặn dưới. Khi đó, với mọi số thực dương ε và λ, với mỗi $x_0 \in X$, tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho

a. $g(x_0) \in g(\bar{x}) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x_0, \bar{x})D + K$.

b. $g(\bar{x}) \notin g(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(\bar{x}, x)D + K, \forall x \neq \bar{x}$.

Hơn nữa, nếu x_0 là điểm εD-xấp xỉ cực tiểu của hàm g (tức là $g(x_0) \notin g(x) + \varepsilon D + K$ với mọi $x \in X$), thì $\bar{x}$ được chọn thỏa đánh giá $d(x_0, \bar{x}) \leq \lambda$.

Chứng minh

Đặt $f(x, y) = g(y) - g(x)$. Dễ thấy f thỏa mãn (i)-(ii). Từ tính tựa bị chặn dưới của hàm g nên suy ra (iii) thỏa. Để áp dụng Định lý 3.1, ta chỉ cần phải kiểm tra quan hệ $\leq_D$ có tính đóng dưới. Thật vậy, vì g là hàm K-lsca nên f có tính chất, với mọi dãy $\{x_n\} \to \bar{x}$ mà $f(x_n, x_{n+1}) \in -K$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì $f(x_n, \bar{x}) \in -K$. Do đó theo Mệnh đề 3.2(ii) ta có quan hệ $\leq_D$ có tính đóng dưới.

Áp dụng Định lý 3.1 với mêtric $d(.,.)$ được thay thế bằng mêtric $\frac{\varepsilon}{\lambda} d(.,.)$, tồn tại $\bar{x} \in X$ thỏa (a) và (b).

Chúng ta tiếp tục kiểm tra $d(x_0,\bar{x}) \le \lambda$. Giả sử $d(x_0,\bar{x}) > \lambda$. Vậy từ (a), ta có

$$g(x_0) \in g(\bar{x}) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x_0,\bar{x})D + K$$
$$\subset g(\bar{x}) + \varepsilon D + K.$$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện x_0 là điểm εD-xấp xỉ cực tiểu của hàm g. ■

Nhận xét 3.3 Hệ quả 3.4 là mở rộng của Định lý 4.1 và Định lý 5.1 trong Bednarczuk and Zagrodny (2009). Điều đó được chỉ ra trong ví dụ dưới đây.

Ví dụ 3.1 Cho $X = Y = \mathbb{R}$, $K = [0,+\infty)$, $D = [1,+\infty)$, $x_0 = 0$, $\varepsilon = 2$, $\lambda = 2$, và

$$g(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{if } x \neq 0, \\ 1 + \frac{1}{e} & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Khi đó, g là K-lsca, D là tập không bị chặn, không đóng và cũng không có tính semi-completed (xem định nghĩa trong Bednarczuk and Zagrodny (2009)). Suy ra, Định lý 4.1 và Định lý 5.1 của Bednarczuk and Zagrodny (2009) không thể áp dụng được. Tuy nhiên, trong trường hợp này các giả thiết của Hệ quả 3.4 đều thỏa mãn. Tính toán trực tiếp, ta có với mọi $\bar{x} \in [-1,1] \setminus \{0\}$ đều là các điểm thỏa yêu cầu.

Ví dụ dưới đây chỉ ra sự thuận lợi Định lý 3.1 và Hệ quả 3.3 so với Hệ quả 3.4 trong việc áp dụng.

Ví dụ 3.2 Cho $X = [0,1]$, $Y = \mathbb{R}, K = [0,+\infty)$, $D = \{1\}$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 1$, $\lambda = 1$ và $f(x,y) = 2022(y-x) + xy + 3$. Khi đó, $f(x,y)$ không thể viết lại dưới dạng $g(y) - g(x)$. Do đó, Hệ quả 3.4, cũng như Định lý 4.1 và Định lý 5.1 của Bednarczuk and Zagrodny (2009) không thể áp dụng được. Tuy nhiên trong trường hợp này, các giả thiết của Định lý 3.1 và Hệ quả 3.3 đều thỏa mãn. Tính toán trực tiếp, ta có $\bar{x} = 0$ là điểm thỏa yêu cầu.

Trong trường hợp đặc biệt $D = \{k_0\}$, với $k_0 \in K\setminus\{0\}$. Khi đó quan hệ $\le_D$ được viết lại thành quan hệ $\le_{k_0}$như dưới đây:

$$x_2 \le_{k_0} x_1 \Leftrightarrow f(x_1,x_2) + d(x_1,x_2)k_0 \le_K 0_Y.$$

Dưới đây là một số điều kiện đủ cho phép chúng ta kiểm tra tính đóng dưới của quan hệ $\le_{k_0}$.

Mệnh đề 3.5 Cho X, Y, K và f thỏa (i)-(ii) như trong Định lý 3.1. Khi đó quan hệ $\le_{k_0}$ có tính chất đóng dưới nếu một trong các điều kiện dưới đây thỏa mãn.

$(i) S_{\le_{k_0}}(x)$ là tập đóng với mọi $x \in X$.

(ii) f có tính chất, với mọi dãy $\{x_n\} \to \bar{x}$ mà $f(x_n,x_{n+1}) \in -K$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì $f(x_n,\bar{x}) \in -K$.

(iii) Nếu $f(x,.)$ là K-lsca với mỗi $x \in X$ thì quan hệ $\le_{k_0}$ có tính đóng dưới.

Chứng minh

Nhận xét, (i) và (ii) là hệ quả trực tiếp của Mệnh đề 3.2. Ta chỉ cần chứng minh (iii). Lấy dãy giảm $\{x_n\} \subseteq X$ hội tụ đến $\bar{x}$. Ta chứng minh $\bar{x} \le_{k_0} x_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Thật vậy, cố định n. Bởi tính nửa liên tục của $d(x_n,.)$, khi đó với mỗi $i \in \mathbb{N}$, tồn tại $Q(i) \in \mathbb{N}$ sao cho, $\forall q \ge Q(i)$,

$$d(x_n,x_{n+q}) \ge d(x_n,\bar{x}) - \tfrac{1}{i}.$$

Bất đẳng thức trên kết hợp với $x_{n+q} \le_{k_0} x_n$, kéo theo, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f(x_n,x_{n+q}) + \left(d(x_n,\bar{x}) - \frac{1}{i}\right)k_0$$
$$\le_K f(x_n,x_{n+q}) + d(x_n,x_{n+q})k_0 \le_K 0_Y.$$

Cho $q \to +\infty$, vì $f(x_n,.)$ là K-lsca, ta có

$$f(x_n,\bar{x}) + (d(x_n,\bar{x}) - \tfrac{1}{i})k_0 \le_K 0_Y.$$

Tiếp tục cho $i \to +\infty$, dựa vào tính đóng của nón K, suy ra

$$f(x_n,\bar{x}) + d(x_n,\bar{x})k_0 \le_K 0_Y.$$

Vậy $\bar{x} \le_{k_0} x_n$. ■

Từ Định lý 3.1, ta có hệ quả trực tiếp dưới đây.

Hệ quả 3.6 Cho (X,d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian vectơ tôpô Hausdorff lồi địa phương được sắp thứ tự bởi nón K lồi đóng có đỉnh và $k_0 \in K\setminus\{0\}$. Cho $f: X \times X \to Y$ là hàm vectơ. Với mỗi $x_0 \in X$, giả sử các điều điều kiện dưới đây thỏa mãn:

(i)$f(x,x) = 0_Y$ với mọi $x \in X$.

$(ii) f(x,z) \le_K f(x,y) + f(y,z)$ với mọi $x,y,z \in X$.

$(iii) f(x_0, S_{\le_{k_0}}(x_0))$ là tựa bị chặn dưới.

Quan hệ $\le_{k_0}$có tính đóng dưới.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in S_{\le_{k_0}}(x_0)$ *sao cho*

$$f(\bar{x},x)+d(\bar{x},x)k_0 \nleq_K 0_Y, \forall x \neq \bar{x}.$$

Nhận xét 3.3. Hệ quả 3.6 trùng với Định lý 3.1 trong Quý và ctv. (2018) và mở rộng hơn Định lý 4.1 trong Gutiérrez et al. (2017) vì tính đóng dưới của quan hệ $\leq_{k_0}$ là giả thiết giả nhẹ của giả thiết $S_{\leq_{k_0}}(x)$ là tập đóng với mọi $x \in X$.

Việc sử dụng EVP nhiễu tập có nhiều thuận lợi hơn so với mô hình EVP nhiễu theo một hướng cố định trong nón thứ tự. Các ví dụ dưới đây sẽ cho thấy rõ điều này

Ví dụ 3.3 Cho $X=\mathbb{R}$, $Y=\mathbb{R}^2$,

$$K=\mathbb{R}^2_+ \coloneqq \{(a;b)\in\mathbb{R}^2: a\geq 0, b\geq 0\},$$

$$D=\{(a;b)\in\mathbb{R}^2 : a+b\geq 1, a\geq 0, b\geq 0\}.$$

Xét $x_0=0, \varepsilon=1, \lambda=1$, và

$$f(x,y)=(0;0).$$

Khi đó, D không thể viết dưới dạng k_0+K với $0\neq k_0\in K$ nên Hệ quả 3.6, Định lý 3.1 trong Quý và ctv. (2018), Định lý 2.1 trong Araya et al. (2008) và Định lý 4.1 trong Gutiérrez et al. (2017) không áp dụng được. Trong trường hợp này, mọi giả thiết của Định lý 3.1 và Hệ quả 3.2 đều thỏa mãn. Tính toán trực tiếp, ta có $\bar{x}=0$ là điểm thỏa yêu cầu.

Ví dụ 3.4 Cho $X=\mathbb{R}^2_+, Y=\mathbb{R}^2, K=\mathbb{R}^2_+$,

$$D=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2: a+b\leq 1, a\geq 0, b\geq 0\},$$

$$d\big((a_1,a_2),(b_1,b_2)\big)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2},$$

Xét hàm

$$f(x,y)=y-x.$$

Tính toán trực tiếp ta có,

$$U_{k_0} \coloneqq \{\bar{x}\in X: f(\bar{x},x)+d(\bar{x},x)k_0 \nleq_K 0_Y, \forall x \neq \bar{x}\}$$

$$=\begin{cases}[0,+\infty)\times\{0\} & , k_0\in\{0\}\times(0,1]\\ \{0\}\times[0,+\infty) & , k_0\in(0,1]\times\{0\}\\ [0,+\infty)\times\{0\}\cup\{0\}\times[0,+\infty) & , k_0\in(0,1]\times(0,1]\\ \mathbb{R}^2_+ & ,\text{trường hợp còn lại}\end{cases}$$

Suy ra,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} U_{\varepsilon.k_0}$$

$$=\begin{cases}[0,+\infty)\times\{0\} & , k_0\in\{0\}\times(0,+\infty),\\ \{0\}\times[0,+\infty) & , k_0\in(0,+\infty)\times\{0\},\\ [0,+\infty)\times\{0\}\cup\{0\}\times[0,+\infty) & , \text{trường hợp còn lại}\end{cases}$$

Nhận thấy rằng, với bất kỳ hướng $k_0\in K\setminus\{0\}$, tập $\lim_{\varepsilon\to 0^+} U_{\varepsilon.k_0}$ không compact nên sẽ không tốt cho việc ước lượng tập nghiệm tối ưu. Trong khi đó,

$$U_D \coloneqq \{\bar{x}\in X: f(\bar{x},x)+d(\bar{x},x)D \not\subset -K, \forall x\neq\bar{x}\}$$

$$=\{(0,0)\},$$

đây cũng chính là tập nghiệm chính xác của bài toán cân bằng,

$$S\coloneqq\{\bar{x}\in X: f(\bar{x},x)\notin -K, \forall x\neq\bar{x}\}=\{(0,0)\}.$$

Từ Định lý 3.1 và Mệnh đề 3.2(iii), ta có kết quả sau.

Hệ quả 3.7 Cho (X,d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian vectơ tôpô Hausdorff lồi địa phương được sắp thứ tự bởi nón K lồi đóng có đỉnh và $k_0\in K\setminus\{0\}$. Cho $f: X\times X\to Y$ là hàm vectơ. Giả sử các điều điều kiện dưới đây thỏa mãn:

$(i) f(x,x)=0_Y$ với mọi $x\in X$.

$(ii) f(x,z)\leq_K f(x,y)+f(y,z)$ với mọi $x,y,z\in X$.

$(iii) f(x,.)$ là tựa bị chặn dưới.

$(iv) f(x,.)$ là K-lsca với mỗi $x\in X$.

Khi đó, với mỗi $x_0\in X$, với các số thực dương ε và λ cho trước, tồn tại $\bar{x}\in X$ sao cho

$$a.\ f(x_0,\bar{x})+\frac{\varepsilon}{\lambda}d(x_0,\bar{x})k_0\leq_K 0_Y.$$

$$b.\ \ f(\bar{x},x)+\frac{\varepsilon}{\lambda}d(\bar{x},x)k_0\nleq_K 0_Y, \forall x\neq\bar{x}.$$

Hơn nữa, nếu x_0 là điểm εk_0-xấp xỉ cực tiểu của hàm f (tức là $f(x_0,x)+\varepsilon k_0\nleq_K 0_Y$ với mọi $x\in X$), thì $\bar{x}$ được chọn thỏa đánh giá $d(x_0,\bar{x})\leq\lambda$.

Nhận xét 3.4. Hệ quả 3.7 là tổng quát của Định lý 2.1 trong Bianchi et al. (2005) và Định lý 1 trong Bianchi et al. (2007).

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, dạng mở rộng của EVP cho hàm hai biến với nhiễu tập được đưa ra. Kết quả nghiên cứu đã mang lại tính mới và khác biệt so với các mô hình trước đây. Các công cụ, kỹ thuật và cách tiếp cận được đề xuất có nhiều khả năng áp dụng được cho mô hình đa trị hai biến với nhiễu tập.

Các mô hình Ekeland cho hàm hai biến được xây dựng sẽ là cơ sở cho phép nghiên cứu tồn tại nghiệm cho bài toán cân bằng vectơ và đa trị mà không cần sử dụng các giả thiết về tính lồi của hàm mục tiêu và tập ràng buộc.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Ansari, Q. H. (2007). Vectorial form of Ekeland-type variational principles with applications to vector equilibrium problems and fixed point theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 334*(1), 561-575. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.12.076

Al-Homidan, S., Ansari, Q. H., & Yao, J-C. (2008). Some generalizations of Ekelandtype variational principles with applications to equilibrium problems and fixed point theory. *Nonlinear Analysis: Theory, Method & Applications, 69*(1), 126-139. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.05.004

Araya, Y., Kimura, K., & Tanaka, T. (2008). Existence of vector equilibria via Ekeland's variational principle. *Taiwanese Journal of Mathematics, 12*(8), 1991-2000. https://doi.org/10.11650/twjm/1500405131

Aubin, J. P., & Ekeland, I. (1984). *Applied Nonlinear Analysis*. Wiley, NewYork.

Bednarczuk, E. M., & Zagrodny, D. (2009). Vector variational principle. *Archiv der Mathematik, 93*(6), 577-586. https://doi.org/10.1007/s00013-009-0072-x

Bianchi, M., Kassay, G., & Pini, R. (2005). Existence of equilibria via Ekeland’s principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 305*(2), 502-512. https://doi.org/10.1007/s00013-009-0072-x

Bianchi, M., Kassay, G., & Pini, R. (2007). Ekeland’s principle for vector equilibrium problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Method & Applications, 66*(7), 1454-1464. https://doi.org/10.1016/j.na.2006.02.003

Borwein, J., Penot, J., & Théra, M. (1984). Conjugate convex operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 102*(2), 399-414. https://doi.org/10.1016/0022-247X(84)90180-X

Caristi, J. (1976). Fixed point theorem for mappings satisfying inwardness conditions. *Transactions of the American Mathematical Society, 215*, 241-251. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1976-0394329-4

Daneˇ s, J. A. (1972). A geometric theorem useful in nonlinear analysis. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 6*(4), 369-375.

Ekeland, I. (1974). On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 47*(3), 324-353. https://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90025-0

Gopfert, A., Riahi, H., Tammer, Chr., & Zalinescu, C. (2003). *Variational Methods in Partially Ordered spaces*. Spinger, New York.

Gutiérrez, C., Kassay, G., Novo, V., Ródennas-Pedregosa, J. L. (2017). Ekeland variational principle in vector equilibrium problems. *SIAM Journal on Optimization, 27*(3), 2045-2425. https://doi.org/10.1137/17M111883X

Khanh, P. Q., & Quy, D. N. (2010). A generalized distance and enhanced Ekeland’s variational principle for vector functions. *Nonlinear Analysis, 73*(7), 2245-2259. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.06.005

Khanh, P.Q., & Quy, D.N. (2013). Version of Ekeland’s variational principle involving set perturbations. *Journal of Global Optimization, 57*(3), 951-968. https://doi.org/10.1007/s10898-012-9983-3

Hai, L. P. (2021). Ekeland variational principles involving set perturbations in vector equilibrium problems. *Journal of Global Optimization, 79*(3), 733-756. https://doi.org/10.1007/s10898-020-00945-5

Liu, C. G., & Ng, K. F. (2011). Ekeland’s variational principle for set-valued functions. *SIAM Journal* on *Optimization, 21*(1), 41-56. https://doi.org/10.1137/090760660

Penot, J. P. (1986). The drop theorem, the petal theorem and Ekeland’s variational principle. *Nonlinear Analysis, 10*(9), 813-822. https://doi.org/10.1016/0362-546X(86)90069-6

Phelps, R. R. (1974). Support cones in Banach spaces and their applications. *Advances in Mathematics, 13*, 1-19. https://doi.org/10.1016/0001-8708(74)90062-0

Qiu, J. H., & He, F. (2020). Ekeland variational principles for set-valued functions with set perturbations. *Optimization, 69*(5), 925-960. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1653295

Quý, Đ. N., Đăng, P. H., & Diễm, Đ. H. (2018). Sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng véctơ dựa vào nguyên lý biến phân Ekeland. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ, 54*(3A), 40-46. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1653295

Rockafellar, R. T., & Wets, R.J.-B. (2009). *Variational Analysis*. Springer, Berlin.

Zabreiko, P. P., & Krasnoselski, M. A. (1971). Solvability of nonlinear operator equations. *Functional Analysis and Its Applications, 5*(3), 206-208. https://doi.org/10.1007/BF01078126