Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ

Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên

website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2022.099

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM VÀ TÍNH LIÊN TỤC CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU

Võ Thành Tài[1], Trần Thị Kim Anh[2] và Trần Ngọc Tâm[2*]

[1]Bộ môn Toán, Khoa Sư phạm, Trường Đại học An Giang, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

[2]Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ

**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Trần Ngọc Tâm (email: tntam@ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:

Ngày nhận bài: 21/05/2022
Ngày nhận bài sửa: 10/06/2022
Ngày duyệt đăng: 01/07/2022

Title:

Existence and continuity of solutions to multiobjective optimal control problems

Từ khóa:

Bài toán điều khiển tối ưu, phương trình trạng thái phi tuyến, sự tồn tại nghiệm, tính liên tục, tối ưu đa mục tiêu

Keywords:

Continuity, existence of solutions, multiobjective optimization, nonlinear state equation, optimal control problem

ABSTRACT

This paper investigates the existence and stability of solutions to a multiobjective optimal control problem with perturbed nonlinear state equations. By using suitable tools and techniques, sufficient conditions for the existence and continuity of solutions to this problem are established.

TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu sự tồn tại và ổn định nghiệm của bài toán điều khiển tối ưu đa mục tiêu với phương trình trạng thái phi tuyến bị nhiễu. Bằng cách sử dụng các công cụ và kỹ thuật thích hợp, các điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm và tính liên tục nghiệm của bài toán đang xét được thiết lập.

1. GIỚI THIỆU

Trong thực tế, hiếm có trường hợp nào mà chỉ một mục tiêu được quan tâm tại cùng một thời điểm. Ví dụ, khi mua hàng ta luôn muốn trả giá thấp trong khi lại mong muốn nhận được sản phẩm chất lượng cao, hoặc trong sản xuất ta luôn có mong muốn tối đa hóa chất lượng và giảm thiểu chi phí. Từ đó dẫn đến việc tối ưu đa mục tiêu, tức là tối ưu hóa tất cả các mục tiêu có liên quan đồng thời. Việc nghiên cứu bài toán tối ưu đa mục tiêu bắt đầu từ thế kỷ XIX và phát triển mạnh mẽ sau khi công trình của Pareto được dịch sang tiếng Anh vào năm 1971 bởi Schwier (Gambier & Badreddin, 2007). Từ năm 1987 đến 1992, các nhà toán học đã đưa ra nhiều kết quả nghiên cứu liên quan đến vấn đề này, kết quả có 1216 bài báo, 208 quyển sách, 31 tạp chí đặc biệt liên quan đến bài toán này được xuất bản (Steuer et al., 1996).

Bài toán điều khiển tối ưu đa mục tiêu đóng vai trò quan trọng trong kỹ thuật và kinh tế (Ramos et al., 2002; Kaya & Maurer, 2014; Zhou & Qiao, 2019). Do đó, bài toán này được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây (Gramatovici, 2005; Kien et al., 2008; Ngo & Hayek, 2016; Oliveira & Silva, 2016; Kien et al., 2018 Yang et al., 2020; Toan & Thuy, 2021). Giống như các lớp bài toán khác, sự ổn định nghiệm luôn là một trong những chủ đề quan trọng và nhận được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của bài toán điều khiển tối ưu đa mục tiêu (Yang et al., 2020; Toan & Thuy, 2021).

Nghiên cứu sự ổn định nghiệm nghĩa là khảo sát sự chịu tác động của nghiệm các bài toán khi dữ liệu đầu vào của chúng bị nhiễu. Trong các bài toán thực tế thì hầu hết các dữ liệu phụ thuộc vào nhiều yếu tố khác nhau, chẳng hạn như yếu tố thời gian, hay các sai số trong việc thu thập dữ liệu từ các thống kê, đo đạc, … Khi kiểm soát được sự ổn định nghiệm, chúng ta sẽ đánh giá được độ lệch nghiệm của bài toán nhiễu so với bài toán gốc. Điều này giúp chúng ta đưa ra các dự báo cần thiết cho việc cập nhật lại các dữ liệu có liên quan. Thông thường, có hai hướng tiếp cận khi nghiên cứu tính ổn định của bài toán tối ưu: hướng thứ nhất là nghiên cứu tính nửa liên tục, liên tục của ánh xạ nghiệm bài toán bị nhiễu bởi tham số với tham số nhiễu thuộc một không gian tham số (Han & Huang, 2017; Anh et al., 2021); hướng thứ hai là nghiên cứu sự hội tụ của dãy nghiệm của bài toán nhiễu đến nghiệm của bài toán gốc. Hướng thứ hai này rất quan trọng và đang được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây (Yu et al., 2014; Gutiérrez et al., 2016; Karuna & Lalitha, 2019; Anh et al., 2020).

Từ những quan sát trên, trong nghiên cứu này, tính ổn định của bài toán điều khiển tối ưu đa mục tiêu được tiếp cận theo hướng thứ hai, trong đó bài toán bị nhiễu trên tập ràng buộc với phương trình trạng thái phi tuyến.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này, ký hiệu $\mathbb{R}^n$ là không gian Euclide n chiều được trang bị chuẩn $|\xi| = \max_i |\xi_i|$ với $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ là không gian Banach các hàm số liên tục $x: [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ với chuẩn $\|x\| = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)|$ và $\bar{B}_{\mathbb{R}^n}$ là quả cầu đóng đơn vị với tâm tại gốc của không gian $\mathbb{R}^n$.

Gọi U là một tập con đóng, khác rỗng của $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$ sao cho:

(i) U bị chặn đều bởi hằng số dương M, nghĩa là $\|u\| \le M$ với mọi $u \in U$.

(ii) U liên tục đồng đều trên $[t_0, t_1]$, nghĩa là với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$, sao cho với bất kỳ $t, t' \in [t_0, t_1]$ thỏa mãn $|t - t'| < \delta$ và bất kỳ $u \in U$ ta đều có $|u(t) - u(t')| < \varepsilon$.

Định lý Ascoli-Arzela nói rằng nếu $u^k \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$ với $k = 1,2,3, \dots$ và nếu dãy $\{u^k\}$ là bị chặn điểm và liên tục đồng đều trên [0,1] thì dãy $\{u^k\}$ có một dãy con hội tụ đều. Kết hợp điều này với các điều kiện (i) và (ii), ta suy ra U là tập con compact của $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$.

Cho các hàm số $g_j: C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times U \to \mathbb{R}$ với $j = 1, 2, \dots, m$ là các hàm số liên tục và $f: [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$. Khi đó, bài toán điều khiển tối ưu đa mục tiêu được phát biểu như sau: Tìm một điều khiển $u \in U$ và hàm số $x \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ sao cho cực tiểu hàm mục tiêu

$$g(x, u) = (g_1(x, u), \dots, g_m(x, u)), \quad (2.1)$$

trong đó

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s), u(s)\big) ds. \quad (2.2)$$

Đặt $\Omega = \{u(t) \in \mathbb{R}^r | u \in U\}$. Do U là tập compact nên Ω là tập con đóng, bị chặn của $\mathbb{R}^r$. Chúng ta giả thiết rằng:

Với mọi $\alpha > 0$,

(A1) f liên tục trên $[t_0, t_1] \times \alpha \bar{B}_{\mathbb{R}^n} \times \Omega$.

(A2) Tồn tại $\ell > 0$ sao cho

$$|f(t, y_1, v) - f(t, y_2, v)| \le \ell |y_1 - y_2|$$
$$\forall (t, y_1, v), (t, y_2, v) \in [t_0, t_1] \times \alpha \bar{B}_{\mathbb{R}^n} \times \Omega.$$

(A3) Tồn tại $\ell_1 > 0$ sao cho

$$|f(t, y, v)| \le \ell_1 (1 + |y|)$$
$$\forall (t, y, v) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \Omega.$$

Đặt

$$X = C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n), Z = X \times U,$$
$$D = [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \Omega$$

và $\mathcal{F} = \{f: D \to \mathbb{R}^n \mid$ (A1), (A2) và (A3) được thỏa mãn$\}$.

Với mỗi $z = (x, u) \in Z$, thì $z(t) = (x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$. Khi đó, chuẩn của z và $z(t)$ được xác định như sau

$$\|z\| = \|x\| + \|u\|,$$

trong đó

$$\|x\| = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)|, \|u\| = \max_{t \in [t_0, t_1]} |u(t)|,$$

và $|z(t)| = |x(t)| + |u(t)|$.

Với mỗi $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, khoảng cách giữa f_1, f_2 được xác định bởi

$$d_{\mathcal{F}}(f_1, f_2) = \sup_{(t, y, v) \in D} |f_1(t, y, v) - f_2(t, y, v)|.$$

Xét $K: \mathcal{F} \rightrightarrows Z$ là ánh xạ đa trị được xác định bởi

$K(f) = \{z = (x, u) \in X \times U \mid$ (2.2) được thoả mãn$\}$.

Khi đó, với mỗi $f \in \mathcal{F}$, bài toán điều khiển tối ưu được phát biểu lại như sau:

(MCP): $\min_{\mathbb{R}^m_+} \underset{z \in K(f)}{} g(z)$,

trong đó g là liên tục trên Z và $\mathbb{R}^m_+$ là nón orthant dương trong không gian $\mathbb{R}^m$.

Một véc tơ $z \in K(f)$ được gọi là một nghiệm yếu của (MCP) nếu

$$(g(z) - \operatorname{int}\mathbb{R}^m_+) \cap g\big(K(f)\big) = \emptyset.$$

Với mỗi $f \in \mathcal{F}$, ký hiệu $S^w(f)$ là tập nghiệm yếu của (MCP), tức là

$$S^w(f) = \{z \in K(f) | (g(z) - \operatorname{int}\mathbb{R}^m_+) \cap g\big(K(f)\big) = \emptyset\}.$$

Sau đây là một số khái niệm cần thiết được sử dụng trong nghiên cứu này.

Cho $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ là các không gian định chuẩn.

Định nghĩa 1.1 Từ Định nghĩa 1, Định nghĩa 2 trong nghiên cứu của Aubin and Ekeland (1984), ta có:

Cho $G: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ là một ánh xạ đa trị. Khi đó,

(a) G được gọi là nửa liên tục trên (viết tắt là usc) tại $x^0 \in \mathbb{X}$ nếu với bất kỳ lân cận mở $\mathbb{V}$ của $G(x^0)$ trong $\mathbb{Y}$, thì tồn tại một lân cận $\mathbb{U}$ của x^0 sao cho $G(x) \subset \mathbb{V}$ với mọi $x \in \mathbb{U}$.

(b) G được gọi là nửa liên tục dưới (viết tắt là lsc) tại $x^0 \in \mathbb{X}$ nếu với bất kỳ tập mở $\mathbb{V}$ trong $\mathbb{Y}$ với $G(x^0) \cap \mathbb{V} \neq \emptyset$, thì tồn tại một lân cận $\mathbb{U}$ của x^0 sao cho $G(x) \cap \mathbb{V} \neq \emptyset$ với mọi $x \in \mathbb{U}$.

Bổ đề 1.1 Dựa vào Định nghĩa 1.4.2 trong nghiên cứu của Aubin and Frankowska (2009), ta có:

Cho $G: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ là một ánh xạ đa trị. Khi đó,

(i) G là lsc tại $x^0 \in \mathbb{X}$ nếu và chỉ nếu với mọi dãy $\{x^k\}$ với $x^k \to x^0$ và $y^0 \in G(x^0)$, tồn tại $y^k \in G(x^k)$ sao cho $y^k \to y^0$.

(ii) Giả sử rằng $G(x^0)$ là tập compact. Khi đó, G là usc tại x^0 nếu và chỉ nếu với mọi dãy $\{x^k\}$ với $x^k \to x^0$ và $y^k \in G(x^k)$, tồn tại một dãy con $\{y^{k_i}\}$ của $\{y^k\}$ sao cho $y^{k_i} \to y^0 \in G(x^0)$.

Định nghĩa 1.2 Dựa vào nghiên cứu của Lalitha and Chatterjee (2012), ta có:

Hàm giá trị vector $g: \mathbb{X} \to \mathbb{R}^m_+$ được gọi là $\mathbb{R}^m_+$-tựa lồi chặt chính thường trên tập lồi $S \subset \mathbb{X}$ nếu với mọi $x, y \in S, x \neq y$ và với mọi $\lambda \in (0,1)$, ta có:

$$\text{hoặc } g(\lambda x + (1-\lambda)y) \in g(x) - \operatorname{int}\mathbb{R}^m_+$$

$$\text{hoặc } g(\lambda x + (1-\lambda)y) \in g(y) - \operatorname{int}\mathbb{R}^m_+.$$

Bổ đề 1.2 Dựa vào Bất đẳng thức Gronwall (Chicone, 2006), ta có:

Nếu x, y là các hàm số không âm, liên tục trên đoạn $[a,b]$ và với hằng số $C \geq 0$ ta có

$$x(t) \leq C + \int_a^t x(s)y(s)ds,\ a \leq t \leq b,$$

thì ta cũng có $x(t) \leq C.e^{\int_a^t y(s)ds}$ với mọi $t \in [a,b]$.

2. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM VÀ TÍNH LIÊN TỤC CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM

Các điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm và tính ổn định của ánh xạ nghiệm tại điểm $f \in \mathcal{F}$ được thiết lập. Một số tính chất quan trọng của ràng buộc như sau:

Bổ đề 3.1

Với mỗi $f \in \mathcal{F}$, tập nghiệm của hệ phương trình vi phân (2.2) là bị chặn và liên tục đồng đều trên $[t_0, t_1]$ với mọi $u \in U$.

Chứng minh

Lấy $f \in \mathcal{F}$ tùy ý, ta có:

$$|\dot{x}(t)| = \big|f\big(t, x(t), u(t)\big)\big| \leq \ell_1(1 + |x(t)|).$$

Tích phân 2 vế ta được:

$$\int_{t_0}^{t} |\dot{x}(s)|ds \leq \int_{t_0}^{t} \ell_1(1 + |x(s)|)ds$$

$$\leq \ell_1(t_1 - t_0) + \int_{t_0}^t \ell_1|x(s)|ds.$$

Mặt khác, ta có:

$$|x(t)| - |x(t_0)| \leq |x(t) - x(t_0)|$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^t \dot{x}(s)ds\right| \leq \int_{t_0}^t |\dot{x}(s)|ds.$$

Suy ra

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| + \ell_1(t_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t} \ell_1|x(s)|ds.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta được:

$$|x(t)| \leq \big(|x(t_0)| + \ell_1(t_1 - t_0)\big)e^{\int_{t_0}^t \ell_1 ds}$$

$$\leq \alpha = \left(|x^0| + \ell_1(t_1 - t_0)\right)e^{\ell_1(t_1-t_0)}$$
$$\forall t \in [t_0, t_1].$$

Do đó, tập nghiệm của hệ phương trình (2.2) bị chặn đều trên đoạn $[t_0, t_1]$ bởi hằng số α với mọi $u \in U$ và $f \in \mathcal{F}$.

Mặt khác, do f liên tục trên tập compact $[t_0, t_1] \times \alpha \bar{B}_{\mathbb{R}^n} \times \Omega$ nên tồn tại cận trên đúng γ. Từ phương trình (2.2), suy ra $|\dot{x}(t)| \leq \gamma$. Như vậy, tập nghiệm của phương trình (2.2) là liên tục Lipschitz với hằng số γ, hay chúng liên tục đồng đều trên $[t_0, t_1]$ với mọi $u \in U$.

Mệnh đề 3.1

Với mỗi $f \in \mathcal{F}$, tập $K(f)$ là khác rỗng và có giá trị compact.

Chứng minh

Với mỗi $f \in \mathcal{F}$, theo định lý tồn tại nghiệm của phương trình vi phân thì phương trình (2.2) luôn có nghiệm với mọi $u \in U$. Do đó, tập $K(f)$ là khác rỗng.

Ta chứng minh $K(f)$ là tập compact với mọi $f \in \mathcal{F}$. Thật vậy, theo Bổ đề 2.1 và điều kiện (ii) thì tập nghiệm phương trình (2.2) và tập U là liên tục đồng đều trên đoạn $[t_0, t_1]$. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$ và với mọi $z = (x, u) \in K(f)$, tồn tại $\delta > 0$, sao cho với bất kỳ $t, t' \in [t_0, t_1]$ thỏa mãn $|t - t'| < \delta$, ta đều có

$$|z(t) - z(t')| = |x(t) - x(t')| + |u(t) - u(t')|$$
$$< \varepsilon.$$

Vậy $K(f)$ liên tục đồng đều trên đoạn $[t_0, t_1]$.

Mặt khác, do tính bị chặn đều của tập nghiệm phương trình (2.2) và tính bị chặn đều của U nên tập $K(f)$ bị chặn đều. Theo định lý Ascoli-Arzela, $K(f)$ là tập tiền compact. Bây giờ, lấy tùy ý $z^k = (x^k, u^k) \in K(f)$ sao cho $\{z^k\}$ hội tụ đến $z = (x, u) \in X \times U$, ta có:

$$x^k(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, x^k(s), u^k(s)\right)ds.$$

Cho $k \to +\infty$, ta được:

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, x(s), u(s)\right)ds.$$

Suy ra $z = (x, u) \in K(f)$, hay $K(f)$ là tập đóng. Vậy $K(f)$ là tập compact.

Mệnh đề 3.2

Giả sử rằng $\{f^k\} \subset \mathcal{F}$ và $(x^k, u^k) \in K(f^k)$ tùy ý. Nếu $\{f^k\}$ hội tụ đến $f \in \mathcal{F}$ và $\{u^k\}$ hội tụ đến $u \in U$ thì $\{x^k\}$ hội tụ đến x sao cho $(x, u) \in K(f)$.

Chứng minh

Với mỗi $u \in U$, phương trình (2.2) có duy nhất nghiệm x thỏa mãn

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, x(s), u(s)\right)ds.$$

Do đó, $(x, u) \in K(f)$. Ta chứng minh $\{x^k\}$ hội tụ đến x. Thật vậy, do $f^k \to f$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $k_1 > 0$, sao cho $d_{\mathcal{F}}(f^k, f) < \frac{\varepsilon}{2}$ với mọi $k \geq k_1$. Mặt khác, do $u^k \to u$ và f liên tục trên tập compact $[t_0, t_1] \times \alpha \bar{B}_{\mathbb{R}^n} \times \Omega$, nên tồn tại $n_2 > 0$ sao cho với mọi $t \in [t_0, t_1]$ và $k \geq k_2$, ta có:

$$|f(t, x(t), u^k(t)) - f(t, x(t), u(t))| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Đặt $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. Khi đó, với mọi $k \geq n_0$, ta có:

$$|x^k(t) - x(t)| \leq$$
$$\leq \int_{t_0}^{t} \left|f^k\left(s, x^k(s), u^k(s)\right) - f\left(s, x(s), u(s)\right)\right|ds$$
$$\leq \int_{t_0}^{t} \left|f^k\left(s, x^k(s), u^k(s)\right) - f\left(s, x^k(s), u^k(s)\right)\right|ds$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \left|f\left(s, x^k(s), u^k(s)\right) - f\left(s, x(s), u^k(s)\right)\right|ds$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \left|f\left(s, x(s), u^k(s)\right) - f\left(s, x(s), u(s)\right)\right|ds$$
$$\leq \int_{t_0}^{t} \frac{\varepsilon}{2}ds + \int_{t_0}^{t} \ell|x^k(s) - x(s)|ds + \int_{t_0}^{t} \frac{\varepsilon}{2}ds$$
$$\leq \varepsilon(t_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t} \ell|x^k(s) - x(s)|ds.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta được:

$$|x^k(t) - x(t)| \leq \varepsilon(t_1 - t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \ell ds}$$
$$\leq \varepsilon(t_1 - t_0)e^{\ell(t_1-t_0)} \text{ với mọi } t \in [t_0, t_1].$$

Suy ra

$$\max_{t\in[0,1]}|x^k(t)-x(t)|\le \varepsilon(t_1-t_0)e^{\ell(t_1-t_0)},$$

hay

$$\|x^k-x\|\le \varepsilon(t_1-t_0)e^{\ell(t_1-t_0)}.$$

Vậy $x^k\to x$.

Mệnh đề 3.3 Ánh xạ K liên tục trên $\mathcal{F}$.

Chứng minh

* Ánh xạ K là usc trên $\mathcal{F}$.

Với mọi $f\in\mathcal{F}$, ta chứng minh K là usc tại f. Theo Mệnh đề 2.1, $K(f)$ là tập compact. Lấy $f^k\in\mathcal{F}$ sao cho $f^k\to f$, với mọi $z^k=(x^k,u^k)\in K(f^k)$, ta có:

$$x^k(t)=x^0+\int_{t_0}^t f^k\big(s,x^k(s),u^k(s)\big)ds.$$

Do U là tập compact nên dãy $\{u^k\}$ có dãy con $\{u^{k_i}\}$ hội tụ đến $u\in U$. Khi đó, phương trình (2.2) có duy nhất nghiệm

$$x(t)=x^0+\int_{t_0}^t f\big(s,x(s),u(s)\big)ds.$$

Từ Mệnh đề 2.2 suy ra $x^{k_i}\to x$. Do đó, $z^{k_i}=(x^{k_i},u^{k_i})\to z=(x,u)\in K(f)$. Vậy ánh xạ K là usc tại f.

* Ánh xạ K là lsc trên $\mathcal{F}$.

Với mọi $f\in\mathcal{F}$, ta chứng minh K là lsc tại f. Thật vậy, với mọi $z=(x,u)\in K(f)$, ta có:

$$x(t)=x^0+\int_{t_0}^t f\big(s,x(s),u(s)\big)ds.$$

Khi đó, với mỗi $f^k\in\mathcal{F}$ sao cho $f^k\to f$, phương trình (2.2) có duy nhất nghiệm

$$x^k(t)=x^0+\int_{t_0}^t f^k\big(s,x^k(s),u(s)\big)ds.$$

Theo Mệnh đề 2.2, ta có $x^k\to x$. Do đó, dãy $\{z^k\}$ với $z^k=(x^k,u)\in K(f^k)$ hội tụ đến $z=(x,u)$. Vậy ánh xạ K là lsc tại f.

Định lý 3.1

Nếu $f\in\mathcal{F}$ thì tập nghiệm $S^w(f)$ là khác rỗng và có giá trị compact.

Chứng minh

Với $f\in\mathcal{F}$, do tập $K(f)$ là tập compact nên theo định lý Weierstrass thì tập nghiệm $S^w(f)$ là khác rỗng. Mặt khác, từ tính compact của tập $K(f)$ nên để chứng minh tập $S^w(f)$ là tập compact thì ta chỉ cần chứng minh tập $S^w(f)$ là tập con đóng của tập $K(f)$. Lấy tùy ý dãy $\{z^k\}\subset S^w(f)$ sao cho $z^k\to z^0$, do tập $K(f)$ là tập compact nên $z^0\in K(f)$. Do $z^k\in S^w(f)$ nên với mọi $\bar z\in K(f)$, ta có

$$g(\bar z)\notin g(z^k)-\operatorname{int}\mathbb{R}^m_+\ \forall k,$$

Mặt khác, do $z^k\to z^0$ và hàm g liên tục nên ta được

$$g(\bar z)\notin g(z^0)-\operatorname{int}\mathbb{R}^m_+\ \forall \bar z\in K(f).$$

Suy ra $z^0\in S^w(f)$, hay $S^w(f)$ là tập con đóng của tập compact $K(f)$. Vậy tập $S^w(f)$ là tập compact.

Định lý 3.2

Nếu $f\in\mathcal{F}$ thì ánh xạ nghiệm S^w là usc tại f.

Chứng minh

Với $f\in\mathcal{F}$, theo Định lý 3.1, tập nghiệm $S^w(f)$ khác rỗng và có giá trị compact. Lấy tùy ý $f^k\in\mathcal{F}$ sao cho $f^k\to f$ và lấy tùy ý $z^k\in S^w(f^k)$. Khi đó, do $z^k\in S^w(f^k)\subset K(f^k)$ và ánh xạ K là usc và có giá trị compact tại f nên tồn tại một dãy con $\{z^{k_i}\}$ của dãy $\{z^k\}$ sao cho dãy $\{z^{k_i}\}$ hội tụ đến $z^0\in K(f)$. Ta cần chứng minh $z^0\in S^w(f)$. Thật vậy, nếu $z^0\notin S^w(f)$ thì tồn tại $\bar z\in K(f)$ sao cho

$$g(\bar z)\in g(z^0)-\operatorname{int}\mathbb{R}^m_+. \qquad (3.1)$$

Vì K là lsc tại f và $\bar z\in K(f)$ nên tồn tại $\bar z^k\in K(f^k)$ sao cho $\bar z^k\to\bar z$. Do $z^{k_i}\in S^w(f^{k_i})$ và $\bar z^{k_i}\in K(f^{k_i})$, nên

$$g(\bar z^{k_i})\notin g(z^{k_i})-\operatorname{int}\mathbb{R}^m_+\quad \forall i. \ (3.2)$$

Mặt khác, do g liên tục nên từ (3.2) ta có:

$$g(\bar z)\notin g(z^0)-\operatorname{int}\mathbb{R}^m_+.$$

Điều này mâu thuẫn với (3.1). Suy ra $z^0\in S^w(f)$. Vậy ánh xạ nghiệm S^w là usc tại f.

Định lý 3.3

Nếu $f\in\mathcal{F}$, $K(f)$ là tập lồi và hàm g là $\mathbb{R}^m_+$-tựa lồi chặt chính thường trên $K(f)$ thì ánh xạ nghiệm S^w là lsc tại f.

Chứng minh

Giả sử rằng S^w không là lsc tại f. Khi đó, tồn tại $f^k\in\mathcal{F}$ sao cho $f^k\to f$ và $z^0\in S^w(f)$ sao cho với mọi $z^k=(x^k,u^k)\in S^w(f^k)$, dãy $\{z^k\}$ không hội tụ đến z^0. Do đó, tồn tại $\varepsilon_0>0$, với mọi $i\in\mathbb{N}$, tồn tại $k_i\ge i$ sao cho $z^{k_i}=(x^{k_i},u^{k_i})\notin B(z^0,\varepsilon_0)$ (trong đó $B(z^0,\varepsilon_0)$ là quả cầu tâm z^0 và bán kính ε_0). Tuy nhiên, do U là tập compact nên tồn tại một dãy con $\{u^{k_{i_j}}\}$ của dãy $\{u^{k_i}\}$ hội tụ đến $\bar u\in U$. Theo

Mệnh đề 2.2, dãy con $\{z^{k_{i_j}}\}$ của dãy $\{z^{k_i}\}$, với $z^{k_{i_j}} = (x^{k_{i_j}}, u^{k_{i_j}})$, sẽ hội tụ đến $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{u}) \in K(f)$.

Ta chứng minh $\bar{z} \in S^w(f)$. Thật vậy, với mọi $\hat{z} \in K(f)$, do K là lsc tại f nên tồn tại $\hat{z}^{k_{i_j}} \in K(f^{k_{i_j}})$ sao cho $\hat{z}^{k_{i_j}} \to \hat{z}$. Mặt khác, từ $z^{k_{i_j}} \in S^w(f^{k_{i_j}})$ và $\hat{z}^{k_{i_j}} \in K(f^{k_{i_j}})$, ta có:

$$g(\hat{z}^{k_{i_j}}) \notin g(z^{k_{i_j}}) - \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+ \quad \forall j. \quad (3.3)$$

Do hàm g liên tục nên từ (3.3) suy ra

$$g(\hat{z}) \notin g(\bar{z}) - \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+ \quad \forall \hat{z} \in K(f).$$

Suy ra $\bar{z} \in S^w(f)$.

Tiếp theo, ta chứng minh $\bar{z} = z^0$. Giả sử ngược lại $\bar{z} \neq z^0$, vì g là $\mathbb{R}^m_+$-tựa lồi chặt chính thường trên $K(f)$ nên với mọi $0 < \lambda < 1$, ta có

hoặc $g(\lambda z^0 + (1-\lambda)\bar{z}) \in g(z^0) - \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+$,

hoặc $g(\lambda z^0 + (1-\lambda)\bar{z}) \in g(\bar{z}) - \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+$.

Điều này mâu thuẫn với $\bar{z}, z^0 \in S^w(f)$. Do đó, ta phải có $\bar{z} = z^0$. Như vậy, dãy $\{z^{k_{i_j}}\}$ hội tụ đến z^0, hay $z^{k_{i_j}} \in B(z^0, \varepsilon_0)$ với j đủ lớn. Điều này mâu thuẫn với $z^{k_i} \notin B(z^0, \varepsilon_0)$. Vậy S^w là lsc tại f.

Kết hợp các Định lý 3.2 và Định lý 3.3, ta được kết quả sau đây:

Định lý 3.4

Nếu $f \in \mathcal{F}$, $K(f)$ là tập lồi và hàm g là $\mathbb{R}^m_+$-tựa lồi chặt chính thường trên $K(f)$ thì ánh xạ nghiệm S^w là liên tục tại f.

*** Nhận xét.** Yu et al. (2014) đã nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và tính liên tục của ánh xạ nghiệm bài toán điều khiển tối ưu vô hướng dưới giả thiết vế phải của phương trình trạng thái bị chặn đều toàn cục. Trong bài báo này, sự tồn tại nghiệm và tính liên tục của ánh xạ nghiệm bài toán điều khiển tối ưu đa mục tiêu dưới giả thiết giảm nhẹ cho hàm số vế phải của phương trình trạng thái chỉ cần bị chặn điểm. Ví dụ sau đây sẽ minh họa cho tính áp dụng của kết quả đạt được trong mục này.

Ví dụ 3.1

Cho tập điều khiển

$$U = \{u^a | u^a(t) = \frac{3}{a}t - \frac{1}{a}, t \in [0,1], a = 1,2,\dots\}$$
$$\cup \{u^c | u^c(t) = c, t \in [0,1], c \in [-1,0]\}.$$

Tìm một điều khiển $u \in U$ và hàm trạng thái $x \in C([0,1], \mathbb{R})$ sao cho cực tiểu hàm mục tiêu

$$g(x,u) = \left(\left(\int_0^1 x(t)dt\right)^2, \left(\int_0^1 u(t)dt\right)^2\right),$$

trong đó, phương trình trạng thái

$$x(t) = \int_0^t u(s)ds. \quad (3.3)$$

Khi đó, ta có $\Omega = [-1,2]$, $X = C([0,1], \mathbb{R}), D = [0,1] \times \mathbb{R} \times \Omega$ và tập U là một tập con compact của $C([0,1], \mathbb{R})$.

Đặt

$$f(t, x(t), u(t)) = u(t),$$

$K(f) = \{z = (x,u) \in X \times U |$ (3.3) được thỏa mãn$\}$.

Rõ ràng $K(f)$ không là tập lồi do tập U không là tập lồi.

Tính toán trực tiếp, ta được

$K(f) = \{z = (x,u) \in X \times U\}$, trong đó

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{3}{2a}t^2 - \dfrac{1}{a}t, \text{nếu } u = u^a, a = 1,2,\dots \\ ct, \quad \text{nếu } u = u^c, c \in [-1,0]. \end{cases}$$

Bài toán điều khiển tối ưu được phát biểu lại như sau:

$$\text{(MCP): } \min_{z \in K(f)}{}_{\mathbb{R}^2_+} \, g(z).$$

Khi đó,

$$g(z) = \begin{cases} \left(0, \dfrac{1}{4a^2}\right), \text{nếu } u = u^a, a = 1,2,\dots \\ \left(\dfrac{c^2}{4}, c^2\right), \text{nếu } u = u^c, c \in [-1,0], \end{cases}$$

và tập nghiệm yếu của (MCP) tại f là

$$S^w(f) = \{z \in K(f) | (g(z) - \operatorname{int} \mathbb{R}^2_+) \cap g(K(f)) = \emptyset\}$$

$$= \{z = (x,u) | x(t) = \frac{3}{2a}t^2 - \frac{1}{a}t, u(t) = \frac{3}{a}t - \frac{1}{a}, t \in [0,1], a = 1,2,\dots\} \cup \{(0,0)\}.$$

Dễ thấy hàm số f thỏa mãn các điều kiện (A1), (A2) và (A3) nên $f \in \mathcal{F}$. Tuy nhiên, hàm số g không là $\mathbb{R}^2_+$-tựa lồi chặt chính thường trên $K(f)$ do $K(f)$ không là tập lồi. Ta sẽ chỉ ra rằng ánh xạ nghiệm S^w không là lsc tại f.

Thật vậy, lấy $f^k\big(t,u(t),x(t)\big)=u(t)+\frac{1}{k}, t\in[0,1], k=1,2,...$ Khi đó, $f^k\to f$ và với mỗi $k=1,2,...$ thì

$K(f^k)=\{z=(x,u)\in X\times U\}$, trong đó

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{2a}t^2+(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{a})t, \text{nếu } u=u^a, a=1,2,...\\ (c+\dfrac{1}{k})t, \quad \text{nếu } u=u^c, c\in[-1,0].\end{cases}$$

Khi đó,

$$g(z)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{4k^2},\dfrac{1}{4a^2}\right), \text{nếu } u=u^a, a=1,2,...\\ \left(\dfrac{(c+\frac{1}{k})^2}{4},c^2\right), \text{nếu } u=u^c, c\in[-1,0],\end{cases}$$

và tập nghiệm

$$\begin{aligned}S^w(f^k)&=\{z\in K(f^k)|\\&\qquad (g(z)-\operatorname{int}\mathbb{R}^2_+)\cap g\big(K(f^k)\big)=\emptyset\}\\&=\{z=(x,u)|x(t)=0,u(t)=-\frac{1}{k},t\in[0,1]\}\\&\quad\cup\{z=(x,u)|x(t)=\frac{1}{k}t,u(t)=0,t\in[0,1]\}.\end{aligned}$$

Lấy $\bar{z}=(\bar{x},\bar{u})\in K(f)$ với

$$\bar{x}(t)=\tfrac{3}{2}t^2-t,\ \bar{u}(t)=3t-1,t\in[0,1].$$

Khi đó, với mọi $z^k=(x^k,u^k)\in S^w(f^k), k=1,2,...$, ta xét hai trường hợp sau đây:

Trường hợp 1. Nếu $x^k(t)=0$ và $u^k(t)=-\frac{1}{k}$, $t\in[0,1], k=1,2,\ldots$ thì

$$\begin{aligned}&\|z^k-\bar{z}\|=\|x^k-\bar{x}\|+\|u^k-\bar{u}\|\\&=\max_{t\in[0,1]}|x^k(t)-\bar{x}(t)|+\max_{t\in[0,1]}|u^k(t)-\bar{u}(t)|\\&=\max_{t\in[0,1]}\left|\tfrac{3}{2}t^2-t\right|+\max_{t\in[0,1]}\left|3t-1+\tfrac{1}{k}\right|\\&=\tfrac{1}{2}+2+\tfrac{1}{k}\to\tfrac{5}{2}\ \text{khi } k\to+\infty.\end{aligned}$$

Trường hợp 2. Nếu $x^k(t)=\frac{1}{k}t$ và $u^k(t)=0$, $t\in[0,1], k=1,2,\ldots$ thì

$$\begin{aligned}&\|z^k-\bar{z}\|=\|x^k-\bar{x}\|+\|u^k-\bar{u}\|\\&=\max_{t\in[0,1]}|x^k(t)-\bar{x}(t)|+\max_{t\in[0,1]}|u^k(t)-\bar{u}(t)|\\&=\max_{t\in[0,1]}\left|\tfrac{1}{k}t-\tfrac{3}{2}t^2+t\right|+\max_{t\in[0,1]}|3t-1|\geq 2.\end{aligned}$$

Như vậy, với mọi $z^k\in S^w(f^k)$, dãy $\{z^k\}$ không hội tụ đến $\bar{z}\in K(f)$. Theo Bổ đề 1.1, ánh xạ S^w không là lsc tại f.

Ví dụ tiếp theo sẽ chỉ ra rằng tồn tại những hàm số f và g thỏa mãn được các điều kiện của Định lý 3.1 và Định lý 3.4.

Ví dụ 3.2

Cho tập điều khiển $U=\{u_\beta|u_\beta(t)=\beta t,\ t\in[0,1],\beta\in[1,2]\}$. Tìm một điều khiển $u\in U$ và hàm trạng thái $x\in C([0,1],\mathbb{R})$ sao cho cực tiểu hàm mục tiêu

$$g(x,u)=\left(\int_0^1 x(t)dt\,,2\int_0^1 u(t)dt\right),$$

trong đó phương trình trạng thái

$$x(t)=\int_0^t(x(s)+u(s))ds. \quad (3.4)$$

Khi đó, ta có $\Omega=[0,2]$, $X=C([0,1],\mathbb{R}), D=[0,1]\times\mathbb{R}\times\Omega$ và tập U là một tập con compact của $C([0,1],\mathbb{R})$.

Đặt

$$f(t,x(t),u(t))=x(t)+u(t),$$

$K(f)=\{z=(x,u)\in X\times U|$ (3.4) được thỏa mãn$\}$.

Tính toán trực tiếp, ta được

$$\begin{aligned}K(f)&=\{z=(x,u)\in X\times U|x(t)=\beta(e^t-t-1),\\&\qquad u(t)=\beta t,t\in[0,1],\beta\in[1,2]\}.\end{aligned}$$

Bài toán điều khiển tối ưu được phát biểu lại như sau:

(MCP): $\min_{z\in K(f)}{}_{\mathbb{R}^2_+}\, g(z).$

Tập nghiệm yếu của (MCP) tại f là

$$\begin{aligned}S^w(f)&=\{z\in K(f)|\\&\qquad(g(z)-\operatorname{int}\mathbb{R}^2_+)\cap g\big(K(f)\big)=\emptyset\}.\end{aligned}$$

Khi đó, ta có các khẳng định sau đây:

(a) Tập nghiệm $S^w(f)$ là khác rỗng và có giá trị compact.

(b) Ánh xạ nghiệm S^w là liên tục tại f.

Thật vậy,

(a) Với mọi $\alpha > 0$, hàm số f liên tục trên $[0,1] \times \alpha\bar{B}_{\mathbb{R}} \times \Omega$ nên giả thiết (A1) được thỏa mãn. Mặt khác, với mọi $(t, y_1, v), (t, y_2, v) \in [0,1] \times \alpha\bar{B}_{\mathbb{R}} \times \Omega$, ta có:

$$|f(t, y_1, v) - f(t, y_2, v)| \leq |y_1 - y_2|,$$

hay giả thiết (A2) được thỏa mãn. Ta kiểm tra giả thiết (A3), với mọi $(t, y, v) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \Omega$, ta có:

$$|f(t, y, v)| \leq |y| + |v| \leq 2 + |y| \leq 2(1 + |y|).$$

Suy ra $f \in \mathcal{F}$. Áp dụng Định lý 3.1 ta được tập nghiệm $S^w(f)$ là khác rỗng và có giá trị compact.

(b) Trước tiên, ta kiểm tra giả thiết lồi của tập $K(f)$. Với mọi $z = (x, u), \bar{z} = (\bar{x}, \bar{u}) \in K(f)$, với mọi $\lambda \in [0,1]$, do $u, \bar{u} \in U$ nên tồn tại $\beta, \bar{\beta} \in [1,2]$ sao cho $u = \beta t$ và $\bar{u} = \bar{\beta} t$. Từ phương trình (3.4) ta có:

$$\lambda x(t) + (1-\lambda)\bar{x}(t) =$$

$$= \lambda \int_0^t \big(x(s) + u(s)\big)ds + (1-\lambda)\int_0^t \big(\bar{x}(s) + \bar{u}(s)\big)ds$$

$$= \int_0^t (\lambda x(s) + (1-\lambda)\bar{x}(s) + \lambda u(s) + (1-\lambda)\bar{u}(s))ds. \quad (3.5)$$

Do $\lambda u(t) + (1-\lambda)\bar{u}(t) = [\lambda\beta + (1-\lambda)\bar{\beta}]t \in U$, nên từ (3.5) suy ra

$$\lambda z + (1-\lambda)\,\bar{z} = (\lambda x(t) + (1-\lambda)\bar{x}(t), \lambda u(t) + (1-\lambda)\bar{u}(t)) \in K(f).$$

Vậy $K(f)$ là tập lồi.

Bây giờ, ta chứng minh hàm g là $\mathbb{R}^2_+$-tựa lồi chặt chính thường trên $K(f)$. Thật vậy, với mọi $z = (x, u), \bar{z} = (\bar{x}, \bar{u}) \in K(f), z \neq \bar{z}$ và với mọi $\lambda \in (0,1)$, do $z \neq \bar{z}$ nên theo định lý tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân ta suy ra $u \neq \bar{u}$. Khi đó, tồn tại $\beta, \bar{\beta} \in [1,2]$ với $\beta \neq \bar{\beta}$ sao cho

$$z = (\beta(e^t - t - 1), \beta t),$$

$$\bar{z} = \big(\bar{\beta}(e^t - t - 1), \bar{\beta} t\big).$$

Ta xét 2 trường hợp sau đây:

Trường hợp 1. Nếu $\beta > \bar{\beta}$ thì

$$g(\lambda z + (1-\lambda)\,\bar{z}) =$$

$$= (\int_0^1 \big(\lambda x(t) + (1-\lambda)\bar{x}(t)\big)dt, 2\int_0^1 \big(\lambda u(s) + (1-\lambda)\bar{u}(s)\big)dt\ )$$

$$= (\int_0^1 \big(\lambda\beta + (1-\lambda)\bar{\beta}\big)(e^t - t - 1)dt, 2\int_0^1 \big(\lambda\beta + (1-\lambda)\bar{\beta}\big)tdt)$$

$$= \left(\big(\lambda\beta + (1-\lambda)\bar{\beta}\big)\frac{2e-5}{2}, \lambda\beta + (1-\lambda)\bar{\beta}\ \right)$$

$$<_{\mathbb{R}^2_+} \left(\beta\frac{2e-5}{2}, \beta\right) = g(z).$$

Trường hợp 2. Nếu $\beta < \bar{\beta}$ thì

$$g(\lambda z + (1-\lambda)\,\bar{z}) =$$

$$= \left(\big(\lambda\beta + (1-\lambda)\bar{\beta}\big)\frac{2e-5}{2}, \lambda\beta + (1-\lambda)\bar{\beta}\ \right)$$

$$<_{\mathbb{R}^2_+} \left(\bar{\beta}\frac{2e-5}{2}, \bar{\beta}\right) = g(\bar{z}).$$

Như vậy, ta được

hoặc $g(\lambda z + (1-\lambda)\,\bar{z}) <_{\mathbb{R}^2_+} g(z)$

hoặc $g(\lambda z + (1-\lambda)\,\bar{z}) <_{\mathbb{R}^2_+} g(\bar{z})$.

Suy ra hàm g là $\mathbb{R}^2_+$-tựa lồi chặt chính thường trên $K(f)$. Áp dụng Định lý 3.4 ta được ánh xạ nghiệm S^w là liên tục tại f.

3. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, sự tồn tại nghiệm và tính liên tục của ánh xạ nghiệm được nghiên cứu ở bài toán điều khiển tối ưu đa mục tiêu với phương trình trạng thái phi tuyến bị nhiễu. Trước hết, các điều kiện đủ cho bài toán có nghiệm đã được thiết lập. Sau đó, bằng cách sử dụng các giả thiết liên quan đến tính bị chặn điểm của phương trình trạng thái và tính liên tục của hàm mục tiêu, tính liên tục của ánh xạ nghiệm yếu của bài toán này cũng được nghiên cứu thành công. Kết quả nghiên cứu là hoàn toàn mới, có thể được tiếp tục nghiên cứu cho ánh xạ nghiệm Pareto của bài toán đang xét hoặc có thể mở rộng nghiên cứu cho lớp các bài toán điều khiển tối ưu đa mục tiêu bị nhiễu cả hàm mục tiêu và phương trình trạng thái.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Aubin, J. P., & Ekeland, I. (1984). Applied Nonlinear Analysis. Courier Corporation.

Aubin, J. P., & Frankowska, H. (2009). Set-valued Analysis. Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4848-0

Anh, L. Q., Duy, T. Q., Hien, D. V., Kuroiwa, D., & Petrot, N. (2020). Convergence of solutions to set optimization problems with the set less order relation. Journal of Optimization Theory and Applications, 185(2), 416-432. https://doi.org/10.1007/s10957-020-01657-2

Anh, L. Q., Tai, V. T., & Tam T. N. (2021). On Hölder calmness and Hölder well-posedness for optimal control problems. Optimization. https://doi.org/10.1080/02331934.2021.1892676

Chicone, C. (1999). Ordinary differential equations with applications. Springer New York.

Gambier, A., & Badreddin, E. (2007). Multi-objective optimal control: An overview. IEEE International Conference on Control Applications, 170-175. https://doi.org/10.1109/CCA.2007.4389225

Gramatovici, S. (2005). Optimality conditions in multiobjective control problems with generalized invexity. Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series, 32, 150-157.

Gutiérrez, C., Miglierina, E., Molho, E. & Novo, V. (2016). Convergence of solutions of a set optimization problem in the image space. Journal of Optimization Theory and Applications, 170(2), 358-371. https://doi.org/10.1007/s10957-016-0942-x

Han, Y., & Huang, N. J. (2017). Well-posedness and stability of solutions for set optimization problems. Optimization, 66(1), 17-33. https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1247270

Karuna, & Lalitha, C. S. (2019). External and internal stability in set optimization. Optimization, 68(4), 833-852. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1556663

Kaya, C. Y., & Maurer, H. (2014). A numerical method for nonconvex multi-objective optimal control problems. Computational Optimization and Applications, 57(3), 685-702. https://doi.org/10.1007/s10589-013-9603-2

Kien, B. T., Wong, N. C., & Yao, J. C. (2008). Necessary conditions for multi-objective optimal control problem with free end-time. SIAM Journal on Control and Optimization, 47(5), 2251-2274. https://doi.org/10.1137/080714683

Kien, B. T., Tuyen, N. V., & Yao, J. C. (2018). Second-order KKT optimality conditions for multiobjective optimal control problems. SIAM Journal on Control and Optimization. 56(6), 4069-4097. https://doi.org/10.1137/17M1161750

Lalitha, C. S., & Chatterjee, P. (2012). Stability for properly quasiconvex vector optimization problem. Journal of Optimization Theory and Applications, 155(2), 492-506. https://doi.org/10.1007/s10957-012-0079-5

Ngo, T. N., & Hayek, N. (2016). Necessary conditions of Pareto optimality for multiobjective optimal control problems under constraints. Optimization, 66(2), 149-177. https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1261349

Oliveira, V. A., & Silva, G. N. (2016). On sufficient optimality conditions for multiobjective control problems. Journal of Global Optimization, 64(4), 721-744. https://doi.org/10.1007/s10898-015-0351-y

Ramos, A. M., Glowinski, R., & Periaux, J. (2002). Nash equilibria for the multiobjective control of linear partial differential equations. Journal of Optimization Theory and Applications, 112(3), 457-498. https://doi.org/10.1023/A:1017981514093

Steuer, R. E., Gardiner, L. R., & Gray, J. (1996). A bibliographic survey of the activities and international nature of multiple criteria decision making. Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 5(3), 195-217. https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1360(199609)5:3<195::AID-MCDA81>3.0.CO;2-D

Toan, N. T., & Thuy, L. Q. (2021). Sensitivity analysis of multi-objective optimal control problems. Applied Mathematics & Optimization, 84(3), 3517-3545. https://doi.org/10.1007/s00245-021-09755-x

Yang, Y., Lin, S., Wang, Q., Xie, Y., & Liu, M. (2020). Multi-objective optimal control approach for static voltage stability of power system considering interval uncertainty of the wind farm output. IEEE Access, 8, 119221-119235. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3002931

Yu, J., Liu, Z. X., Peng, D. T., Xu, D. Y., & Zhou, Y. H. (2014). Existence and stability analysis of optimal control. Optimal Control Applications and Methods, 35(6), 721-729. https://doi.org/10.1002/oca.2096

Zhou, H., & Qiao, J. (2019). Multiobjective optimal control for wastewater treatment process using adaptive MOEA/D. Applied Intelligence, 49(3), 1098-1126. https://doi.org/10.1007/s10489-018-1319-7