Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2022.239

ỨNG DỤNG TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU TỔ HỢP VỚI HÀM MỤC TIÊU NHÂN TÍNH

Nguyễn Thị Cẩm Tiên[1*], Nguyễn Thanh Toàn[2], Thái Đức Duy[1] và Mai Đình Lộc[1]

[1]*Bộ môn Sư phạm Toán học, Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*

[2]*Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Sư phạm Vĩnh Long*

[*]*Người chịu trách nhiệm về bài viết: Nguyễn Thị Cẩm Tiên (email: nguyentien14301@gmail.com)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 14/07/2022
Ngày nhận bài sửa: 07/08/2022
Ngày duyệt đăng: 13/08/2022

Title:
Applying multicriteria optimization to the multiplicative combinatorial optimization problem

Từ khóa:
Tối ưu nhân tính, tối ưu đa mục tiêu, vị trí 1-median, tập không bị trội

Keywords:
Multiplicative optimization, Multicriteria optimization, 1-median location, Nondominating set

ABSTRACT

In this paper, the combinatorial optimization problem with the objective function being a multiplication of several classical functions is concerned. Firstly, an equivalent master problem is constructed and then the corresponding multicriteria optimization version which plays an important role in finding an optimal solution to the original problem is shown. Based on the solution existence property to the original problem which is also an extremely supporting and efficient solution of the multicriteria optimization problem, a generic algorithm for the problem is given. The case with the multiplication of exactly two functions is also discussed. Finally, a linear time algorithm for solving the multiplicative 1-median location problem on a tree is proposed.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, bài toán tối ưu tổ hợp trong đó hàm mục tiêu là tích của một số hàm cổ điển được quan tâm. Trước tiên, một bài toán tương đương được xây dựng và sau đó chỉ ra rằng bài toán tối ưu đa mục tiêu tương ứng đóng một vai trò quan trọng trong việc tìm ra lời giải tối ưu cho bài toán ban đầu. Dựa trên tính chất tồn tại nghiệm tối ưu của bài toán ban đầu cũng là một nghiệm bổ trợ hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu, một thuật toán tổng quát cho bài toán được đưa ra. Trường hợp hàm nhân tính với chính xác hai hàm số cũng được đề cập. Cuối bài báo này, một thuật toán chạy trong thời gian tuyến tính để giải bài toán 1-median trên cây với hàm nhân tính được đề xuất.

1. MỞ ĐẦU

Lý thuyết vị trí là một hướng nghiên cứu quan trọng của vận trù học và tối ưu tổ hợp với nhiều ứng dụng thực tiễn. Bài toán vị trí được đề xuất, một cách không chính thức, bởi Fermat vào khoảng thế kỷ XVII. Trong bài toán vị trí, mục đích là tìm kiếm các vị trí tối ưu cho các cơ sở mới với hai hàm mục tiêu phổ biến là hàm *median* và hàm *center*. Các mô hình và phương pháp giải liên quan đến lý thuyết vị trí cũng được Drezner and Hamacher (2002) trình bày một cách tương đối đầy đủ. Hội nghị thường niên về lý thuyết vị trí với các chủ đề nghiên cứu đa dạng được tổ chức tại các nước như Anh, Đức, Pháp, Tây Ban Nha để thảo luận các vấn đề như: các hướng phát triển lý thuyết của bài toán vị trí, ứng dụng lý thuyết vị trí vào giao thông vận tải, cứu hộ, dự đoán trong công nghiệp và thương mại,… Hiện nay, một số hướng chủ đề nghiên cứu liên quan đến bài toán vị trí được nghiên cứu bởi Nickel and Puerto (2005) với các bài toán vị trí hàm trung vị có thứ tự; Puerto et al. (2018) với mô hình vị trí mở rộng; Averbakh and Berman (2000) với tính vững của lý thuyết vị trí; Nguyen and Hung (2020) với các bài toán vị trí ngược… và những tham khảo đã được các bài báo trên đề cập.

Hàm nhân tính nói chung là hàm không lồi. Do đó, bài toán tối ưu với hàm nhân tính là bài toán tối ưu toàn cục và rất khó giải quyết, chẳng hạn nghiên cứu của Konno and Kuno (1990) và Thoai (1991). Mặc dù gặp nhiều khó khăn trong việc giải quyết bài toán tối ưu với hàm không lồi, nhưng một số phương pháp giải hiệu quả đã được đề xuất. Đối với bài toán nhân tính bao gồm hai hàm số, Konno et al. (1991, 1995) đã nghiên cứu lập trình tuyến tính nhân tính, trong đó hàm mục tiêu là phép nhân của hai hàm tuyến tính affine và các ràng buộc tạo nên khối đa diện. Các tác giả đã phát triển phương pháp tiếp cận tham số dựa trên phương pháp đơn hình cho bài toán. Hơn nữa, Aneja et al. (1984), Kuno (1996), Tuy and Tam (1992) đã áp dụng nhiều phương pháp khác nhau như xấp xỉ ngoại biên, thuật toán phân nhánh và cắt, thuật toán phân nhánh và chặn, phân tích đa diện,… để giải quyết bài toán. Lập trình tuyến tính nhân tính có thể được giải quyết bằng phương pháp xấp xỉ ngoại biên và thuật toán phân nhánh và chặn với hướng giảm phạm vi (Tuy, 1991; Konno & Kuno, 1992).

Bài toán tối ưu tổ hợp với hàm nhân tính lần đầu tiên được nghiên cứu bởi Punnen (2001), ông đã chứng minh rằng bài toán là NP – khó với các bài toán đường đi ngắn nhất, lát cắt cực tiểu, cây bao trùm nhỏ nhất. Tác giả cũng đã phát triển các thuật toán với thời gian đa thức cho một số bài toán đặc biệt. Việc nghiên cứu các bài toán tối ưu tổ hợp nhân tính mang lại nhiều ứng dụng quan trọng trong lập kế hoạch tài chính (Maranas et al., 1997), tối ưu vốn đầu tư (Watanabe, 1996), thiết kế chip điện tử (Dorneich & Sahinidis, 1996),… Bài toán này có thể được áp dụng trong thiết kế mạng xã hội, ví dụ, trình bày hai loại trọng số trên mỗi đỉnh của cây. Loại đầu tiên liên quan đến dân số tại cơ sở và loại thứ hai liên quan đến tần số khách hàng có nhu cầu dịch vụ. Khi đó hai hàm trung vị liên quan đến việc vận chuyển một số lượng dân số đến cơ sở mới và tần số sử dụng dịch vụ của khách hàng, việc nhân hai hàm số liên quan đến dân số và tần số thể hiện hành vi xã hội của khách hàng. Chính vì vậy, hàm nhân tính đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu các bài toán vị trí.

Trong bài báo này, các vấn đề liên quan đến "Ứng dụng tối ưu đa mục tiêu cho bài toán tối ưu tổ hợp với hàm mục tiêu nhân tính" được trình bày theo cấu trúc như sau. Ở phần đầu, các thông tin sơ lược về vấn đề được nghiên cứu đã được giới thiệu. Phần 2 nêu lại một số khái niệm, tính chất liên quan đến bài toán tối ưu tổ hợp nhân tính tổng quát. Hơn nữa, mối liên hệ giữa tối ưu đa mục tiêu và tối ưu với hàm nhân tính cũng được được đề cập ở phần này. Trong Phần 3, một số tính chất của bài toán trung vị trên cây được trình bày, sau đó sẽ đề xuất thuật toán để giải quyết bài toán trung vị trên cây với hàm nhân tính cùng với các ví dụ minh họa. Cuối cùng là phần kết luận vấn đề và tài liệu tham khảo.

2. BÀI TOÁN TỐI ƯU TỔ HỢP NHÂN TÍNH

Trong phần này các tính chất đặc biệt của bài toán tối ưu tổ hợp nhân tính và tính chất nghiệm của bài toán tối ưu đa mục tiêu được nghiên cứu. Sau đó, mối liên hệ giữa bài toán tối ưu đa mục tiêu và bài toán tối ưu với hàm nhân tính được đưa ra.

Cho tập hợp nền hữu hạn $E=\{e_1,e_2,...,e_n\}$, $\mathcal{F}$ là họ các tập con trong E. Gọi $\mathcal{F}$ tập hợp tất cả các tập con hữu hiệu. Hàm $c_i : E \to \mathbb{R}$ biến mỗi phần tử $e \in E$ thành một số dương $c_i(e)$ với $i=\overline{1,q}.$ Kí hiệu cột vector c_i trong $\mathbb{R}^n$ tương ứng với tất cả các giá trị của các phần tử trong E với $i=\overline{1,q}$. Hơn nữa, mỗi tập con hữu hiệu $F \in \mathcal{F}$ tương ứng với một vector $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ trong $\mathbb{R}^n$. Thật vậy, nếu $e_j \in \mathcal{F}$ thì $x_j=1,$ còn lại $x_j=0$ với $j=\overline{1,n}$. Nghĩa là với mỗi $x \in \mathcal{F}$ thì x là vector tương ứng với một nghiệm hữu hiệu. Bài toán tối ưu tổ hợp nhân tính với q hàm được trình bày như sau:

$$\min_{x\in\mathcal{F}} M(x)=\prod_{i=1}^{q}\left(c_i^T x + a_i\right), \qquad (1)$$

trong đó, a_i là số thực không âm với $i=\overline{1,q}.$

Với $q=1$, ta có bài toán tối ưu tổ hợp với hàm mục tiêu $M(x)=c_1^T x + a_1.$

Với $q=2,$ bài toán (1) là nhân tính với đúng hai hàm, đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu do những tính chất của nó.

Cho một vector $\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q\right)$, trong đó $\alpha > 0$ khi và chỉ khi $\alpha_i > 0$ với mọi $i = \overline{1,q}.$ Đặt $\Gamma = \left\{\alpha > 0 : \prod_{i=1}^{q} \alpha_i = 1\right\}$, ta có bài toán sau:

$$\min_{\alpha\in\Gamma,\ x\in\mathcal{F}} \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \left(c_i^T x + a_i\right). \qquad (2)$$

Mối liên hệ giữa bài toán tối ưu mục tiêu ban đầu (1) với bài toán (2) được nêu dưới đây:

Mệnh đề 2.1 Với A và B lần lượt là các giá trị tối ưu của (1) và (2). Khi đó, $A = \left(\frac{B}{q}\right)^q$.

Chứng minh.

Gọi $x^* \in \mathcal{F}$ là nghiệm tối ưu của (1), khi đó $A = \prod_{i=1}^{q}\left(c_i^T x^* + a_i\right)$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta được:

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \left(c_i^T x^* + a_i\right) \geq qA^{\frac{1}{q}}. \qquad (3)$$

Hơn nữa, bất đẳng thức (3) là không nghiêm ngặt. Dấu bằng đạt tại vector $\alpha^* = \left(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_q^*\right)$ với $\alpha_i^* \left(c_i^T x^* + a_i\right) = \alpha_j^* \left(c_j^T x^* + a_j\right)$, trong đó $i \neq j$ và $i, j \in \left\{1, \ldots, q\right\}$. Bằng các phép biến đổi sơ cấp, ta có $\alpha_i^* = \frac{A^{\frac{1}{q}}}{c_i^T x^* + a_i}$ với $i = \overline{1,q}.$ Suy ra $qA^{\frac{1}{q}} = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^* \left(c_i^T x^* + a_i\right) \geq B$ hay $A \geq \left(\frac{B}{q}\right)^q$.

Mặt khác, đặt $x^{**} \in \mathcal{F}$ và $\alpha^{**} \in \Gamma$ là nghiệm tối ưu của (2), ta được $B = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^{**} \left(c_i^T x^{**} + a_i\right) \geq q\left(\prod_{i=1}^{q} \alpha_i^{**} \left(c_i^T x^{**} + a_i\right)\right)^{\frac{1}{q}} \geq qA^{\frac{1}{q}}$ với $\prod_{i=1}^{q} \alpha_i^{**} = 1.$

Do đó, ta có được $A \leq \left(\frac{B}{q}\right)^q$. Vậy mệnh đề đã được chứng minh $A = \left(\frac{B}{q}\right)^q$. ■

Với trường hợp $q = 2,$ ta có kết quả sau.

Hệ quả 2.1 Cho K và L lần lượt là giá trị tối ưu của (1) và (2) với trường hợp $q = 2$, ta có $K = \frac{L^2}{4}$.

Từ Mệnh đề 2.1, ta giải bài toán tối ưu tổ hợp dạng tổng (2) với tham số $\alpha \in \Gamma$ thay vì bài toán tối ưu dạng nhân (1). Nếu chọn α với $\alpha_j = \varepsilon, j \in \left\{1, .., q\right\} \setminus \left\{i\right\}$ và $\alpha_i = \frac{1}{\varepsilon^{q-1}}$ trong đó ε là số dương đủ nhỏ, khi đó $\alpha \in \Gamma$ và (2) tương đương bài toán tối ưu tổ hợp đơn mục tiêu $\min_{x\in\mathcal{F}} \left(c_i^T x + a_i\right)$ với $i = \overline{1,q}.$

Tiếp theo, mối liên hệ giữa bài toán tối ưu tổ hợp nhân tính (1) và bài toán tối ưu đa tiêu chí được đưa ra. Trước tiên, xem xét lại các khái niệm cơ bản liên quan đến bài toán tối ưu đa mục tiêu. Cho hai vector $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_q\right)$ và $y = \left(y_1, y_2, \ldots, y_q\right)$ thuộc $\mathbb{R}^q$. Khi đó $x \leq y$ khi và chỉ khi $x_i \leq y_i$ với $i = \overline{1,q}$ và trong đó có ít nhất một bất đẳng thức nghiêm ngặt. Hơn nữa, $x \leqq y$ khi và chỉ khi $x \leq y$ hoặc $x = y$. Hai vector x và y không so sánh được nếu và chỉ nếu tồn tại hai chỉ số i và j sao cho $x_i < y_i$ và $y_j < x_j$. Đặt $f\left(x\right) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ trong đó $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^q$ được xác định bởi $f\left(x\right) = \begin{pmatrix} f_1\left(x\right) \\ f_2\left(x\right) \\ \ldots \\ f_q\left(x\right) \end{pmatrix}$. Từ đó, có thể giả sử $\mathcal{Y}$ là tập giá trị của $f\left(x\right)$. Với $x \in \mathcal{X}$, nếu tồn tại $x' \in \mathcal{X}$ sao cho $f\left(x'\right) \leq f\left(x\right)$, thì ta nói $f\left(x'\right)$ trội hơn $f\left(x\right)$. Tóm lại, nếu $f\left(x\right)$ không bị trội bởi bất kì điểm nào trong $\mathcal{Y}$, thì ta nói $f\left(x\right)$ là điểm không bị trội trong $\mathcal{Y}$.

Ký hiệu $\mathcal{Y}_N = \{f(x) \in \mathcal{Y} : f(x)$ là điểm không bị trội trong $\mathcal{Y}\}$ và $\mathcal{X}_E := \{x \in \mathcal{X} : f(x) \in \mathcal{Y}_N\}$ là tập các nghiệm hữu hiệu (hay nghiệm Pareto) trong $\mathcal{X}$. Lưu ý, giá trị mục tiêu tương ứng với nghiệm hữu hiệu là một điểm không bị trội. Bài toán tối ưu đa mục tiêu $\min_{x\in\mathcal{X}} f(x)$ đi tìm tập tất cả các nghiệm hữu hiệu của $f(x)$, tức là tìm $\mathcal{X}_E$.

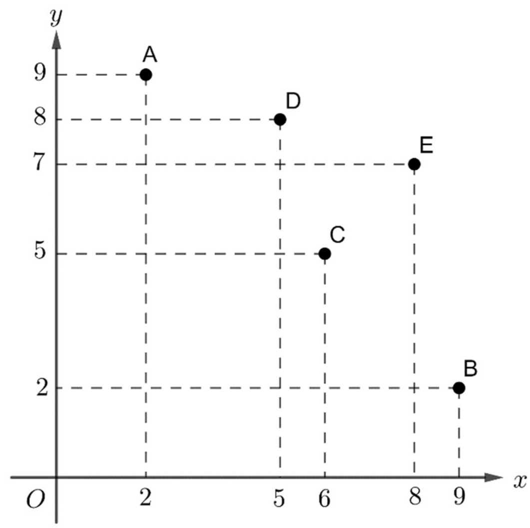
Tiếp theo một phương pháp vô hướng hóa để tìm nghiệm hữu hiệu cho bài toán tối ưu đa mục tiêu được thảo luận, cụ thể trong bài báo này phương pháp tổng trọng số được sử dụng. Xét vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ trong $\mathbb{R}^d_+$, nghĩa là $\lambda_i > 0$ với $i = \overline{1,d}$. Hàm vô hướng đối với $f(x)$ được viết là $F_\lambda(x) = \sum_{i=1}^d \lambda_i f_i(x)$. Ta có mối liên hệ giữa nghiệm tối ưu của $F(x)$ và nghiệm hữu hiệu của $f(x)$ như sau.

Bổ đề 2.1 Theo Ehrgott (2005, Mệnh đề 3.9, tr. 71) *Nếu x là một nghiệm tối ưu của $F_\lambda(x)$ với $\lambda \in \mathbb{R}^d_+$, thì x là nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa tiêu chí tương ứng.*

Gọi điểm x là nghiệm tối ưu của $F_\lambda(x)$ với $\lambda \in \mathbb{R}^d_+$ (trong đó $\mathbb{R}^d_+$ là tập các vector thực d chiều có các thành phần dương) và là nghiệm bổ trợ hữu hiệu. Do đó, $f(x)$ là điểm bổ trợ không bị trội trong $\mathcal{Y}$ nếu x là nghiệm bổ trợ hữu hiệu. Hơn nữa, tập $\mathcal{X}_{SE} := \{x \in \mathcal{X} : x$ là nghiệm tối ưu của $F_\lambda(x)$ với $\lambda \in \mathbb{R}^d_+\}$ là tập tất cả các nghiệm bổ trợ hữu hiệu trong $\mathcal{X}$. Tương tự, ta ký hiệu $\mathcal{Y}_{SN}$ là tập hợp các điểm bổ trợ không bị trội.

Theo Bổ đề 2.1, ta có $\mathcal{Y}_{SN} \subset \mathcal{Y}_N$, $\mathcal{X}_{SE} \subset \mathcal{X}_E$ và quan hệ con này là nghiệm ngặt. Thật vậy, với $\mathcal{Y}$ không lồi, tồn tại một số điểm không bị trội nhưng không là điểm bổ trợ không bị trội. Một điều kiện đủ để $\mathcal{Y}_{SN} = \mathcal{Y}_N$ (và do đó $\mathcal{X}_{SE} = \mathcal{X}_E$) là miền giá trị $\mathcal{Y}$ là một miền đa diện (Ehrgott, 2005), Định lý 7.28, tr. 192).

Tiếp theo, một giải pháp mạnh hơn cho bài toán tối ưu đa tiêu chí được giới thiệu. Với một điểm $f(x)$ trong $\mathcal{Y}_{SN}$, khi đó $f(x)$ là một điểm tới hạn bổ trợ không bị trội nếu không tồn tại hai điểm $f(x')$ và $f(x'')$ trong $\mathcal{Y}_{SN} \setminus \{f(x)\}$ sao cho $f(x) = \tau f(x') + (1-\tau) f(x'')$ với $\tau \in (0,1)$. Đặt $\mathcal{Y}_{ExSN}$ đại diện cho tập hợp tất cả các điểm tới hạn bổ trợ không bị trội và $\mathcal{X}_{ExSE}$ đại diện cho các nghiệm hữu hiệu tương ứng, nghĩa là $x \in \mathcal{X}_{ExSE}$ thì $f(x) \in \mathcal{Y}_{ExSN}$. Trong Hình 1, có thể thấy rằng $\mathcal{Y}_{ExSN} \subset \mathcal{Y}_{SN} \subset \mathcal{Y}$ và quan hệ con này là nghiêm ngặt. Tập hợp $\mathcal{Y}$ bao gồm tất cả các điểm trên hình $A(2;9), B(9;2), C(6;5), D(5;8), E(8;7)$, trong đó $\mathcal{Y}_{SN}$ bao gồm các điểm A, B, C. Đặc biệt, hai điểm A, B thuộc tập $\mathcal{Y}_{ExSN}$.



Hình 1. Các điểm trong $\mathcal{Y}$

Hàm mục tiêu của bài toán tối ưu tổ hợp đa tiêu chí $f : \mathcal{F} \to \mathcal{Y}$ được định nghĩa như sau:

$$f(x) = \begin{pmatrix} c_1^T x + a_1 \\ c_2^T x + a_2 \\ \cdots \\ c_q^T x + a_q \end{pmatrix}.$$

Gọi $\mathcal{F}$ là tập hữu hiệu của hàm đa tiêu chí $f(x)$ Theo (2), ta thu được kết quả quan trọng sau đây.

Mệnh đề 2.2 Tồn tại một điểm $x \in \mathcal{F}_{SE}$ sao cho nó là điểm tối ưu của (2).

Chứng minh.

Theo các phân tích trên thì các điểm tối ưu của (2) là nghiệm hữu hiệu bổ trợ nên ta được kết quả.

Theo Mệnh đề 2.1 và Mệnh đề 2.2, phát triển một thuật toán đơn giản để giải quyết bài toán (1). Trước tiên, tìm tất cả các điểm tới hạn không bị trội bổ trợ, là nghiệm ứng cử tối ưu của (1). Với mỗi $f\left(x^*\right) \in \mathcal{Y}_{ExSN}$, lấy tương ứng nghiệm x^* trong $\mathcal{F}_{ExSE}$. Sau đó, kiểm tra xem x^* có là nghiệm tối ưu của $\min_{x \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \left(c_i^T x + a_i\right)$ với $\alpha_i = \dfrac{A^{\frac{1}{q}}}{c_i^T x + a_i}$ bằng cách giải bài toán tối ưu tổ hợp cổ điển. Nếu không, đặt $Val\left(x^*\right) = +\infty$. Ngược lại, nếu nó là một nghiệm tối ưu, lưu giá trị $Val\left(x^*\right) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \left(c_i^T x^* + a_i\right)$ đối với x^*. Khi biết $Val\left(x^*\right)$ với mọi $f\left(x\right) \in \mathcal{Y}_{ExSN}$, giá trị nhỏ nhất trong số chúng là nghiệm tối ưu của (1).

Định lý 2.1 Đối với tập các điểm không bị trội $\mathcal{Y}_{ExSN}$ đã biết, bài toán tối ưu hóa tổ hợp nhân tính có thể giải trong thời gian $O\left(c\left|\mathcal{Y}_{ExSN}\right|\right)$, trong đó c là độ phức tạp để giải bài toán tối ưu tổ hợp cổ điển tương ứng.

Xét (2) với q=2 như sau:

$$\min_{\mu > 0, x \in \mathcal{F}} \mu\left(c_1^T x + a_1\right) + \frac{1}{\mu}\left(c_2^T x + a_2\right). \quad (4)$$

Theo Mệnh đề 2.2, có thể viết (4) tương đương với

$$\min_{\mu > 0, x \in \mathcal{F}_{ExSE}} \mu\left(c_1^T x + a_1\right) + \frac{1}{\mu}\left(c_2^T x + a_2\right).$$

Hơn nữa, $\mu = \sqrt{\dfrac{c_2^T x + a_2}{c_1^T x + a_1}}$ với mỗi nghiệm hữu hiệu tới hạn bổ trợ x trong $\mathcal{F}_{ExSE}$ (theo Mệnh đề 2.1).

Vì $\mathcal{F}$ là tập hữu hạn nên $\mathcal{Y}_{ExSN}$ cũng là tập hữu hạn. Do đó, giả sử $\mathcal{Y}_{ExSN} = \left\{f\left(x^1\right), f\left(x^2\right), \ldots, f\left(x^k\right)\right\}$. Sắp xếp tập hợp $\mathcal{Y}_{ExSN}$ theo thứ tự từ điển $f\left(x^1\right) \leq_{lex} f\left(x^2\right) \leq_{lex} \ldots \leq_{lex} f\left(x^k\right)$. Vì các phần tử trong $\mathcal{Y}_{ExSN}$ không so sánh được với nhau nên $c_1^T x^1 + a_1 < c_1^T x^2 + a_1 < \ldots < c_1^T x^k + a_1$ và $c_2^T x^k + a_2 < c_2^T x^{k-1} + a_2 < \ldots < c_2^T x^1 + a_2$.

Với mỗi điểm $f\left(x^i\right)$ kết hợp với một giá trị $\mu_i = \sqrt{\dfrac{c_2^T x^i + a_2}{c_1^T x^i + a_1}}, i = \overline{1, k}$. Điều này dẫn đến $\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_k$. Cho đường thẳng $\lambda_1 x + \lambda_2 y = \Lambda$ trong $\mathbb{R}^2$ với hai số dương λ_1, λ_2, ta định nghĩa $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ là độ dốc của đường thẳng đó. Xét độ dốc của hai điểm liên tiếp $f\left(x^{i-1}\right)$ và $f\left(x^i\right)$ trong $\mathcal{Y}_{ExSN}$ với $i = \overline{2, k}$. Liên kết độ dốc $\beta_1 = +\infty$ với giá trị tối ưu của $\min_{x \in \mathcal{F}_{ExSE}} \beta_1\left(c_1^T x + a_1\right) + \left(c_2^T x + a_2\right)$ tương ứng với $\left(c_1^T x^1 + a_1; c_2^T x^1 + a_2\right)$.

Đặt

$$\beta_i = \frac{\left(c_2^T x^{i-1} + a_2\right) - \left(c_2^T x^i + a_2\right)}{(c_1^T x^i + a_1) - (c_1^T x^{i-1} + a_1)} = \frac{c_2^T\left(x^{i-1} - x^i\right)}{c_1^T\left(x^i - x^{i-1}\right)}$$

với $i = \overline{2, k}$.

Cuối cùng, độ dốc $\beta_{k+1} = 0$ với giá trị tối ưu của $\min_{x \in \mathcal{F}_{ExSE}} \beta_k\left(c_1^T x + a_1\right) + \left(c_2^T x + a_2\right)$ tương ứng với $\left(c_1^T x^k + a_1; c_2^T x^k + a_2\right)$.

Bổ đề 2.2 Độ dốc của hai điểm liên tiếp $f\left(x^{i-1}\right)$ và $f\left(x^{i}\right)$ giảm, nghĩa là $\beta_i > \beta_{i+1}$ với $i = \overline{1,k}$.

Chứng minh.

Xét 2 cặp điểm liên tiếp $f\left(x^{i-1}\right), f\left(x^{i}\right)$ và $f\left(x^{i}\right), f\left(x^{i+1}\right)$ thuộc $\mathcal{Y}_{ExSN}$ Gọi

$$A\left(c_1^T x^{i-1} + a_1, c_2^T x^{i-1} + a_2\right),$$
$$B\left(c_1^T x^{i} + a_1, c_2^T x^{i} + a_2\right),$$
$$C\left(c_1^T x^{i+1} + a_1, c_2^T x^{i+1} + a_2\right),$$
$$D\left(c_1^T x^{i-1} + a_1, c_2^T x^{i} + a_2\right),$$
$$E\left(c_1^T x^{i} + a_1, c_2^T x^{i+1} + a_2\right).$$

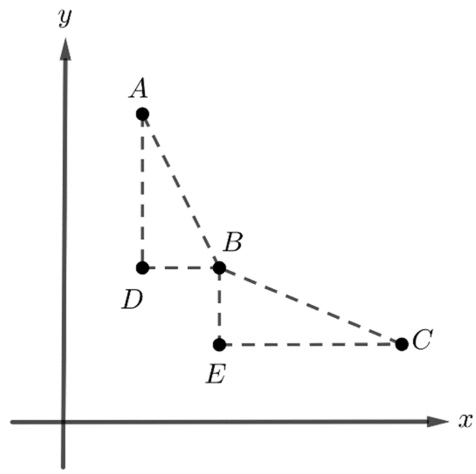
Theo định nghĩa $\beta_i = \tan \widehat{DBA}, \beta_{i+1} = \tan \widehat{ECB}$.

Vì $A, B, C \in \mathcal{Y}_{ExSN}$, $0 < \widehat{ECB} < \widehat{DBA} < \frac{\pi}{2}$ nên $\tan \widehat{ECB} < \tan \widehat{DBA}$. Vậy $\beta_i > \beta_{i+1}$ với $i = \overline{1,k}$.

Xét $\mathbb{R}_+ = \cup_{i=1}^{k}\left(\beta_i, \beta_{i+1}\right]$. Hàm $g\left(y_1, y_2\right) = \mu y_1 + \frac{1}{\mu} y_2$ với $\left(y_1, y_2\right) \in \mathcal{Y}_{ExSN}$ có độ dốc μ^2. Nếu $\mu^2 \in \left(\beta_{i+1}, \beta_i\right]$ hoặc $\mu \in \left(\sqrt{\beta_{i+1}}, \sqrt{\beta_i}\right]$, thì $g\left(y_1, y_2\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $f\left(x^i\right) \in \mathcal{Y}_{ExSN}$. Chúng tôi đưa ra một thuật toán chung để giải quyết bài toán tối ưu tổ hợp nhân tính với chính xác hai hàm. Với $i = \overline{1,k}$ kiểm tra xem $\mu_i \in \left(\sqrt{\beta_{i+1}}, \sqrt{\beta_i}\right]$. Nếu có lưu giá trị

$$Val\left(x^i\right) = \mu_i\left(c_1^T x^{i-1} + a_1\right) + \frac{1}{\mu}\left(c_2^T x^{i-1} + a_2\right).$$

Ngược lại, lưu $Val\left(x^i\right) = +\infty$. Mục tiêu tối ưu là giá trị nhỏ nhất trong số $Val\left(x^i\right)$ với $i = \overline{1,k}$ và nghiệm tương ứng là nghiệm tối ưu. Giả sử đã biết $\mathcal{F}_{ExSE}$, quá trình sẽ diễn ra trong thời gian $\left|\mathcal{F}_{ExSE}\right|$.



Hình 2. Các điểm A, B, C, D, E đã xây dựng

Định lý 2.2 Với $\mathcal{F}_{ExSE}$ đã biết, bài toán tối ưu tổ hợp nhân tính với chính xác hai hàm có thể giải trong thời gian $O\left(\left|\mathcal{F}_{SE}\right|\right)$.

3. BÀI TOÁN 1 – MEDIAN TRÊN CÂY VỚI HÀM NHÂN TÍNH

Trong phần này, bài toán vị trí trên cây với hàm mục tiêu nhân tính hai hàm trung vị được thảo luận. Cho một cây $T = \left(V, E\right)$ với tập đỉnh V và tập cạnh E. Gán hai trọng số dương w_v^1 và w_v^2 lần lượt với mỗi đỉnh $v \in V$, mỗi cạnh $e \in E$ có độ dài dương l_e. Trong lý thuyết vị trí, có thể coi mỗi cạnh của cây là một khoảng liên tục mà các điểm nằm trên đó. Nói ngắn gọn, một điểm x nằm trên trên cạnh $e = \left(u, v\right)$ được xác định bởi một tham số $t \in \left[0, 1\right]$ và nó chia cạnh e thành hai cạnh con. Cạnh con thứ nhất $\left(x, u\right)$ có độ dài tl_e và cạnh con thứ hai $\left(x, u\right)$ có độ dài là $\left(1-t\right)l_e$. Điểm x trùng với đỉnh u nếu $t = 0$ và trùng với đỉnh v nếu $t = 1$. Khoảng cách giữa hai điểm trên cây T là độ dài đường đi duy nhất nối chúng. Từ đó, có thể viết $x \in T$ để biểu diễn điểm x trên cây T. Với a_1 và a_2 là hai số dương, bài toán trung vị trên cây với hàm nhân tính được định nghĩa như sau:

$$\min_{x \in T} M\left(x\right) = \left(\sum_{v \in V} w_v^1 d\left(x, v\right) + a_1\right)\left(\sum_{v \in V} w_v^2 d\left(x, v\right) + a_2\right). \quad (5)$$

Hàm mục tiêu $M(x)$ là hàm nhân tính của hai hàm 1-median. Ta được bài toán với hai mục tiêu như sau:

$$\min_{x\in T} f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{v\in V} w_v^1 d(x,v) + a_1 \\ \Sigma_{v\in V} w_v^2 d(x,v) + a_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Với hàm trung vị $f_i(x) = \Sigma_{v\in V} w_v^i d(x,v) + a_i$ với $i = 1,2$. Xét tập đỉnh để tìm điểm 1 – median trên cây với những tính chất nổi bật được đưa ra bởi Kariv and Hakimi (1979). Với đỉnh x^* cho trước, có các cây con $T(x^*) = \left\{T_1, T_2, \dots, T_{\deg(v^*)}\right\}$, trong đó $\deg(x^*)$ là bậc của x^*. Theo quy ước, mỗi điểm nằm ở phần trong của cạnh có bậc là 2 và bậc của đỉnh là số đỉnh liền kề của nó. Cho $W^i(\star) = \Sigma_{v\in\star} w_v^i$ với $i = 1,2$ và $W(\star) = \begin{pmatrix} W^1(\star) \\ W^2(\star) \end{pmatrix}$ với $\star$ là một tập con của V. Nếu $\star = V$ thì $W = W(V)$. Xem xét lại điều kiện để một đỉnh là nghiệm hữu hiệu của (6).

Định lý 3.1 Theo Hamacher et al. (1999), Điểm x^* là điểm 1 – median hai mục tiêu của T khi và chỉ khi $W^i(T_i)$ không trội hơn $\frac{1}{2}W$ với $i = 1,\dots,\deg(x^*)$.

Nhớ lại $\mathcal{X}_E$ là tập tất cả các nghiệm hữu hiệu. Theo Hamacher et al. (1999), $\mathcal{X}_E$ là cây con của T. Hơn nữa, ta nghiên cứu sâu hơn về cấu trúc của tập nghiệm hữu hiệu như sau.

Bổ đề 3.1 *Tập $\mathcal{X}_E$ là một đỉnh hoặc một đường đi trong T.*

Chứng minh.

Giả sử có nhiều hơn hai lá trong cây con $\mathcal{X}_E$, chọn ra 3 lá v^1, v^2, v^3 trong $\mathcal{X}_E$. Theo thuật toán của Hamacher et al. (1999) $v^1 = \arg\min_{x\in T} \Sigma_{v\in V} w_v^1 d(x,v) + a_1$ và $v^2 = \arg\min_{v\in V} \Sigma_{v\in V} w_v^2 d(x,v) + a_2$. Cho $u = P(v^1,v^2) \cap P(v^1,v^3) \cap P(v^2,v^3)$, do tính lồi của hàm trung vị theo mỗi đường đi của cây, ta có $f_1(x)$ và $f_2(x)$ cùng tăng trên đường đi $P(u,v^3)$. Vì vậy, không có điểm nào thuộc $P(u,v^3)\setminus\{u\}$ là điểm không bị trội. Điều này mâu thuẫn với $P(u,v^3) \in \mathcal{X}_E$. ■

Từ đây về sau, giả sử rằng $\mathcal{X}_E = P(v^1, v^2)$. Tập nghiệm hữu hiệu $\mathcal{X}_E$ chính xác là một đỉnh nếu $v^1 \equiv v^2$. Ta sẽ xem xét các tập nghiệm hữu hiệu bỗ trợ cho $f(x)$.

Mệnh đề 3.1 Mọi điểm $x \in P(v^1, v^2)$ đều là nghiệm bổ trợ hữu hiệu.

Chứng minh.

Với một vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^2$ luôn có thể giả sử rằng $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Hàm đơn mục tiêu liên quan đến λ có thể viết dưới dạng:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \\ &= \Sigma_{v\in V} w_v(\lambda_1) d(x,v) + \lambda_1 a_1 + (1-\lambda_1) a_2 \end{aligned},$$

trong đó, $w_v(\lambda_1) = \lambda_1 w_v^1 + (1-\lambda_1) w_v^2$ với $\lambda_1 \in [0,1]$.

Với điểm x nằm ở phần trong của cạnh $e = (u,v)$, có được hai cây con T_1 chứa v^1 sau khi xóa x khỏi cây. Do đó, $v^2 \in T\setminus T_1$ và $W_{\lambda_1}(T_1) = \Sigma_{v\in T_1} w_v(\lambda_1) = \Sigma_{v\in T_1}\left(\lambda_1 w_v^1 + (1-\lambda_1) w_v^2\right)$, $W_{\lambda_1}(T\setminus T_1) = \Sigma_{v\in T\setminus T_1} w_v(\lambda_1) =$ $\Sigma_{v\in T\setminus T_1}\left(\lambda_1 w_v^1 + (1-\lambda_1) w_v^2\right)$.

Ta xét hàm $g(\lambda_1) = W_{\lambda_1}(T_1) - W_{\lambda_1}(T \setminus T_1)$. Vì $W_{\lambda_1}(T_1)$ và $W_{\lambda_1}(T \setminus T_1)$ là hai hàm liên tục trên λ_1 nên $g(\lambda_1)$ cũng liên tục với $\lambda_1 \in [0,1]$. Do đó, ta có $g(0) = \sum_{v \in T_1} w_v^2 - \sum_{v \in T \setminus T_1} w_v^2 \le 0, g(1) = \sum_{v \in T_1} w_v^1 - \sum_{v \in T \setminus T_1} w_v^1 \ge 0$ (do tính tối ưu của v^1 và v^2 đối với trọng số w^1 và w^2 (Goldman, 1971). Do tính liên tục của $g(\lambda_1)$, tồn tại $\lambda_1^* \in [0,1]$ sao cho $g(\lambda_1^*) = 0$. Vì vậy, $W_{\lambda_1^*}(T_1) = W_{\lambda_1^*}(T \setminus T_1)$ hoặc x là một điểm 1 – median của T đối với trọng số $w_v(\lambda_1^*)$ với v thuộc T. Hay x là nghiệm bổ trợ hữu hiệu. ■

Mệnh đề 3.2 *Bất kỳ điểm x nằm ở miền trong của cạnh (u,v) với $(u,v) \in P(v^1, v^2)$ đều không là nghiệm bổ trợ hữu hiệu tới hạn.*

Chứng minh.

Với điểm x nằm ở miền trong của cạnh $(u,v) \in P(v^1, v^2)$, xác định một tham số $t \in (0,1)$ sao cho $d(x,u) = td(u,v)$ và $d(x,v) = (1-t)d(u,v)$. Sau khi xóa x từ cây T có hai cây con T_1, T_2 sao cho $u \in T_1$ và $v \in T_2$. Ta nhận được:

$$
\begin{aligned}
f_i(x) &= \sum_{v' \in T_1} w_{v'}^i d(x,v') + \sum_{v' \in T_2} w_{v'}^i d(x,v') + a_i \\
&= \sum_{v' \in T_1} w_{v'}^i \left(d(u,v') + d(x,u)\right) + \sum_{v' \in T_2} w_{v'}^i \left(d(v,v') + d(x,v)\right) + a_i \\
&= \sum_{v' \in T_1} w_{v'}^i \left(d(u,v') + td(u,v)\right) + \sum_{v' \in T_2} w_{v'}^i \left(d(u,v') - d(u,v) + (1-t)d(u,v)\right) + a_i \\
&= f_i(u) + t\left(W^i(T_1) - W^i(T_2)\right)d(u,v)
\end{aligned}
$$

với $i = 1,2$.

Tương tự, $f_i(x) = f_i(v) + (1-t)\left(W^i(T_2) - W^i(T_1)\right)d(u,v)$ với $i = 1,2$ Vậy $f(x) = tf(v) + (1-t)f(u)$ với $t \in (0,1)$ hay $f(x)$ không là nghiệm bổ trợ hữu hiệu tới hạn. ■

Theo Mệnh đề 3.2, ta tìm kiếm một nghiệm tối ưu của (5) trong tập đỉnh của đường đi $P(v^1, v^2)$ Đánh số các đỉnh trong $P(v^1, v^2)$ sao cho $P(v^1, v^2) = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$, trong đó $v_1 \equiv v^1$ và $v_m \equiv v^2$.Vì $f_1(x)$ và $f_2(x)$ tăng và giảm khi x đi qua đường đi $P(v^1, v^2)$ tương ứng, biết rằng $f(v_1) \le_{lex} f(v_2) \le_{lex} \cdots \le_{lex} f(v_m)$. Xét hai đỉnh kề nhau v_j, v_{j+1} với $j = \overline{1, m-1}$, có hai cây con $T^j_{(v_j, v_{j+1})}$ và $T^{j+1}_{(v_j, v_{j+1})}$ sau khi xóa cạnh (v_j, v_{j+1}), trong đó $v_j \in T^j_{(v_j, v_{j+1})}$ và $v_{j+1} \in T^{j+1}_{(v_j, v_{j+1})}$. Nếu biết $f_i(v_j)$ có thể tính

$$
f_i(v_{j+1}) = f_i(v_j) + \left(W^i\left(T^{j+1}_{(v_j, v_{j+1})}\right) - W^i\left(T^j_{(v_j, v_{j+1})}\right)\right)d(v_j, v_{j+1})
$$

với $i = 1,2$. Hơn nữa, có thể tính toán trọng số của tất cả các cây con của T trong thời gian tuyến tính, xem Puerto et al. (2018). Do đó, các giá trị $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_m)$ có thể tính toán trong thời gian tuyến tính.

Dựa vào cách tiếp cận tổng quát ở phần 2 cho bài toán tối ưu tổ hợp nhân tính với chính xác hai hàm, chúng tôi phát triển thuật toán để giải quyết bài toán 1-median trên cây, xem **Thuật toán 1**.

Tính đúng đắn của thuật toán dựa vào đối số ở Phần 2. Tiếp theo, độ phức tạp của thuật toán được nghiên cứu. Có thể tìm thấy đường đi $P\left(v^1, v^2\right)$ trong thời gian tuyến tính (Hamacher et al., 1999). Hơn nữa, các giá trị $f\left(v_1\right), f\left(v_2\right), \ldots, f\left(v_n\right)$ được tính toán trong thời gian tuyến tính. Vì có nhiều bước lặp tuyến tính trong thuật toán và mỗi lần lặp có thể được tính trong một thời gian không đổi, nên thuật toán chạy trong thời gian tuyến tính.

Định lý 3.2 Bài toán trung vị trên cây có hàm mục tiêu là nhân tính với đúng hai hàm có thể giải được trong thời gian tuyến tính.

Thuật toán 1: Giải bài toán trung vị trên cây với hàm nhân tính

Input: Một ví dụ về bài toán 1- median trên cây với hàm nhân tính.

Tìm các đường đi $P\left(v^1, v^2\right) = \left(v_1, v_2, \ldots, v_m\right)$ với $v^1 \equiv v_1$ và $v^2 \equiv v_m$ (Hamacher et al., 1999).

Tính $f\left(v_1\right), f\left(v_2\right), \ldots, f\left(v_m\right)$ và tập $Val\left(v_i\right) = +\infty$ với $i = \overline{1, m}$

Tập $\mu_i = \left(\dfrac{f_2\left(x_i\right)}{f_1\left(x_i\right)}\right)^2$ *với* $i = \overline{1, m}$

Tập $\beta_1 = +\infty, \beta_i = \dfrac{f_2\left(x^{i-1}\right) - f_2\left(x^i\right)}{f_1\left(x^i\right) - f_1\left(x^{i-1}\right)}$ với $i = \overline{2, m}, \beta_{m+1} = 0.$

for $i = \overline{1, m}$ do

if $\mu_i \in \left(\beta_{i+1}, \beta_i\right)$ then

Đặt $Val\left(v_i\right) = \mu_i f_1\left(v_i\right) + \dfrac{1}{\mu_i} f_2\left(v_i\right)$

end if

end for

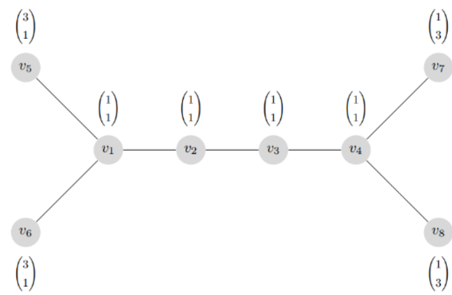
Đặt $i^* = \arg\left(\min_{i=1,\ldots m} Val\left(v_i\right)\right).$

Output: Một điểm 1-median nhân tính v_i^* trên cây.

Có thể nhân hai hàm thành phần như sau $\left(\sum_{v \in V} w_v^1 d\left(v_i, v\right) + a_1\right)\left(\sum_{v \in V} w_v^2 d\left(v_i, v\right) + a_2\right)$ trong mỗi lần lặp và so sánh các giá trị này để có giá trị nhỏ nhất. Tính toán đơn giản này cũng chạy trong thời gian tuyến tính. Tuy nhiên, cần nhiều bộ nhớ hơn để lưu kết quả của phép nhân hơn là lưu từng thành phần. Do đó, Thuật toán 1 cũng giúp tối ưu hóa việc lưu trữ dữ liệu.

Sau đây là một ví dụ minh họa cho Thuật toán 1.

Ví dụ 1. Cho một ví dụ về bài toán trung vị trên cây với hàm nhân tính như Hình 3, trong đó trọng số đỉnh được ghi trên mỗi đỉnh của cây và tất cả các độ dài cạnh bằng 1. Hơn nữa $a_1 = a_2 = 0$.



Hình 3. Một ví dụ về bài toán trung vị trên cây với hàm nhân tính

Ta tính toán các giá trị sau:

$f\left(v_1\right) = \begin{pmatrix} 20 \\ 32 \end{pmatrix},$

$f\left(v_2\right) = \begin{pmatrix} 22 \\ 26 \end{pmatrix} f\left(v_3\right) = \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \end{pmatrix},$

$f\left(v_4\right) = \begin{pmatrix} 32 \\ 20 \end{pmatrix}$

$\mu_1 = 2.56, \mu_2 \approx 1.4, \mu_3 \approx 0.72, \mu_4 \approx 0.39.$

$\beta_1 = +\infty, \beta_2 = 3, \beta_3 = 1, \beta_4 \approx 0.33, \beta_5 = 0$.

Kết quả tính các vòng lặp được cho bởi Bảng 1.

Bảng 1. Kết quả tính toán của mỗi lần lặp

i	1	2	3	4
$Val\left(v_i\right)$	$+\infty$	23.92	23.92	$+\infty$

Từ kết quả Bảng 1, ta có thể kết luận v_2 và v_3 là hai điểm trung vị trên cây với hàm nhân tính.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, bài toán tối ưu tổ hợp nhân tính liên quan đến bài toán tối ưu đa tiêu chí được giải quyết. Có thể chứng minh được rằng tồn tại một nghiệm tối ưu của bài toán ban đầu, nghiệm đó chính là nghiệm hữu hiệu tới hạn bổ trợ của bài toán tối ưu đa mục tiêu cảm sinh. Dựa trên tính chất này, nghiên cứu phát triển một thuật toán chung cho bài toán. Hơn nữa, tính chất đặc biệt của bài toán trung vị nhân tính chính xác hai hàm cũng được nghiên cứu. Kết quả chỉ ra rằng các đỉnh trong đường đi chứa tất cả các nghiệm hữu hiệu của bài toán 1-median hai mục tiêu cũng chính là nghiệm hữu hiệu tới hạn bổ trợ. Điều này cho phép phát triển thuật toán để tìm ra nghiệm tối ưu cho bài toán trung vị với hàm mục tiêu nhân tính. Vì vậy, nhóm tác giả tin rằng mô hình tối ưu nhân tính cho bài toán vị trí là một lĩnh vực rất đáng được nghiên cứu chuyên sâu hơn nữa trong tương lai.

LỜI CẢM ƠN

Đề tài này được tài trợ bởi Trường Đại học Cần Thơ, Mã số: TSV2022-129.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Aneja, Y. P., Aggarwal, V. A., & Nair, K. P. K. (1984). On a class of quadratic programs. *European Journal of Operational Research*, *18*(1), 62-70.

Averbakh, I., & Berman, O. (2000). Minmax regret median location on a network under uncertainty. *INFORMS Journal on Computing*, *12*(2), 104-110.

Dorneich, M. C., & Sahinidis, N. V. (1995). Global optimization algorithms for chip layout and compaction. *Engineering Optimization+ A35*, *25*(2), 131-154.

Drezner, Z., & Hamacher, H. (2002). Facility location: applications and theory Springer Verlag.

Ehrgott, M. (2005). Multicriteria optimization. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Goldman, A. J. (1971). Optimal center location in simple networks. *Transportation science*, *5*(2), 539-560.

Hamacher, H. W., Labbé, M., & Nickel, S. (1999). Multicriteria network location problems with sum objectives. *Networks: An International Journal*, *33*(2), 79-92.

Kariv, O., & Hakimi, S. L. (1979). An algorithmic approach to network location problems, II. The p-medians, *SIAM Journal on Applied Mathematics 37*(3), 536-560.

Konno, H., & Kuno, T. (1990). Generalized linear multiplicative and fractional programming. *Annals of Operations Research*, *25*(1), 147-161.

Konno, H., & Kuno, T. (1992). Linear multiplicative programming. *Mathematical Programming*, *56*(1), 51-64.

Konno, H., & Kuno, T. (1995). Multiplicative programming problems. In: Horst R., & Pardalos P.M. (eds). *Handbook of Global Optimization. Nonconvex Optimization and Its Applications* (Vol. 2). Springer, Boston.

Konno, H., Yajima, Y., & Matsui, T. (1991). Parametric simplex algorithms for solving a special class of nonconvex minimization problems. *Journal of Global Optimization*, *1*(1), 65-81.

Kuno, T. (1996). A practical alogorithm for minimizing a rank-two saddle function on a polytope. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, *39*(1), 63-76.

Maranas, C. D., Androulakis, I. P., Floudas, C. A., Berger, A. J., & Mulvey, J. M. (1997). Solving long-term financial planning problems via global optimization. *Journal of Economic Dynamics and Control*, *21*(8-9), 1405-1425.

Nguyen, K. T., & Hung, N. T. (2020). The inverse connected p-median problem on block graphs under various cost functions. *Annals of Operations Research*, *292*(1), 97-112.

Nickel, S., & Puerto, J. (2005). Location Theory: A Unified Approach, Springer. *New York*.

Puerto, J., Ricca, F., & Scozzari, A. (2018). Extensive facility location problems on networks: an updated review. *Top*, *26*(2), 187-226.

Punnen, A. (2001). Combinatorial optimization with multiplicative objective function. *International Journal of Operations and Quantitative Management*, *7*(3), 205-209.

Thoai, N. V. (1991). A global optimization approach for solving the convex multiplicative programming problem. *Journal of Global Optimization*, *1*(4), 341-357.

Tuy, H. (1991). Polyhedral annexaton, dualization and dimension reduction technique in global optimization. *Journal of Global Optimization*, *1*(3), 229-244.

Tuy, H., & Tam, B. T. (1992). An efficient solution method for rank two quasiconcave minimization problems. *Optimization*, *24*(1-2), 43-56.

Watanabe, H. (1996). Bond portfolio optimization problems and their applications to index tracking: a partial optimization approach. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, *39*(3), 295-306