MỘT SỐ KHÓ KHĂN VÀ SAI LẦM CỦA HỌC SINH KHI GIẢI CÁC BÀI TOÁN BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

ThS. NGUYỄN THỊ CHUNG*

Abstract: *Through examples, the article also pointed out the mistakes that are often made when students solve problems of geometric representation forms of complex numbers; pointing out how to fix it, fix mistakes like that; thereby helping them capable of thinking, flexibility and responsiveness to find the solution of the problem and avoid the errors that may occur.*

Keywords: *skill training, geometric, complex numbers.*

Trong dạng toán biểu diễn hình học của số phức, học sinh (HS) phải tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z mà trong đó số phức z thỏa mãn một hệ thức nào đó. Đây cũng là một dạng bài tập mà HS trung học phổ thông thường gặp qua các bài toán trong các phần ôn tập, luyện thi tốt nghiệp, thi đại học. Tuy nhiên, các em thường lúng túng trong cách giải. Để giúp HS không phải gặp khó khăn trong những bài toán như vậy, cần rèn luyện cho các em có kĩ năng làm các bài toán dạng này.

1. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z mà trong đó số phức z thoả mãn một hệ thức nào đó.

Phương pháp giải: Giả sử số phức có biểu diễn dạng: z = **x + yi (x , y ∈ R)**, khi đó số phức z biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi điểm M(x, y). Ta có: | | | | √ , sử dụng dữ kiện của đề bài để tìm ra mối liên hệ giữa x và y và từ đó suy ra tập hợp điểm M.

Khó khăn, sai lầm của HS: - Bài tập đặt trong nội dung kiến thức mới: các bài toán biểu diễn hình học của số phức nên HS có thể lúng túng, chưa thành thạo cách làm; - HS nhầm sang giải phương trình có chứa trị tuyệt đối của số phức; - Sau khi tìm ra mối liên hệ giữa x và y nhưng lại không kết luận hoặc kết luận sai tập hợp điểm; - Chưa nắm chắc các phép biến đổi tương đương.

Ví dụ 1: Giả sử M(z) là điểm nằm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Tìm tập hợp các điểm M(z) thỏa mãn một trong các điều kiện sau: a) | | ; b) | | | |.

Lời giải sai:

a) | |

Vậy phương trình có hai nghiệm là: z_1 = 3- i và z_2 = -1- i

b) | | | | –

Vậy có một điểm M (z) là: – .

Nguyên nhân: Ở câu a và b, HS chưa nắm chắc kiến thức, bị nhầm lẫn sang giải phương trình có chứa trị tuyệt đối với số phức nhưng thực ra đó lại là module của số phức.

Lời giải đúng:

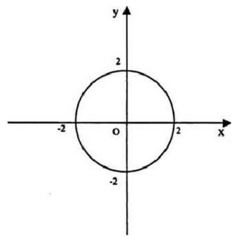
a) | | (1)

Giả sử số phức z = $x + yi$ (x,y∈ R) . Khi đó:

(1) ⇔ | |

⇔ | |

⇔ √



⇔ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

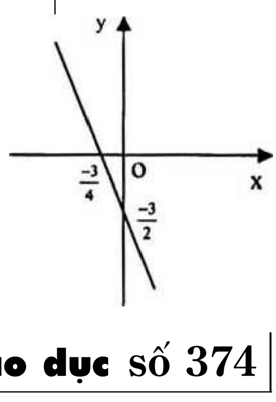
Vậy, tập hợp các điểm M(z) trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z thỏa mãn (1) là đường tròn có tâm I (1,-1) và bán kính R = 2.

b) |2+z| = |i-z| (2)

Giả sử số phức z = x + yi (x,y ∈ R). Khi đó:

(2) ⇔ | | | |

⇔ | | | |



⇔ $(x+2)^2 + y^2 = x_2 + (1-y)^2$

⇔ $x^2 + 4x + 4 + y^2 = x^2 + 1 - 2y + y^2$

⇔ $4x + 2y + 3= 0$

Vậy tập hợp điểm M(z) trên mặt phẳng tọa độ biểu

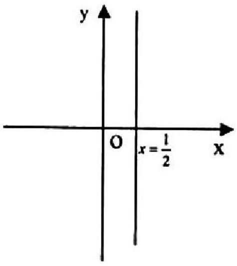
* Trường Đại học Hải Phòng

diễn số phức z thỏa mãn (2) là đường thẳng $4x + 2y + 3 = 0$.

Ví dụ 2: Giả sử M(z) là điểm nằm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Tìm tập hợp các điểm M(z) thỏa mãn một trong các điều kiện sau: a) $|z+\bar{z}+3|=4$; b) $|z+\bar{z}+1-i|=2$; c) $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|$.

Lời giải sai:

a) $|z+\bar{z}+3|=4$ (3)



Giả sử số phức $z = x + yi$ ($x, y \in$ R).

$\Rightarrow \bar{z}=x-yi$. Khi đó:

(3) $\Leftrightarrow$ $|x+yi+x-yi+3|=4$

$\Leftrightarrow |2x+3|=4$

$\Leftrightarrow 2x + 3 = 4$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy, tập hợp điểm M (z) là đường thẳng song song với trục tung x = $\frac{1}{2}$.

b) $|z-\bar{z}+1-i|=4$ (4)

Giả sử số phức z = x + yi (x,y $\in$ R).

$\Rightarrow \bar{z}=x-yi$. Khi đó:

(4) $\Leftrightarrow |x+yi-x+yi+1-i|=4$

$\Leftrightarrow |1+(2y-1)i|=2$

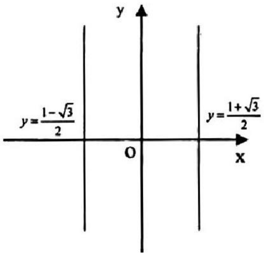
$\Leftrightarrow \sqrt{1^2+(2y-1)^2}=2$

$\Leftrightarrow 1+(2y-1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow 1+4y^2 - 4y + 1 = 4$

$\Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 1 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$



Vậy, tập hợp các điểm M(z) là hai đường thẳng vuông góc với trục hoành y $=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ và y $=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

c) 2 $|z-i|=|z-\bar{z}+2i|$ (5)

Giả sử số phức $z = x + yi$ (x,y $\in$ R).

$\Rightarrow \bar{z}=x-yi$. Khi đó:

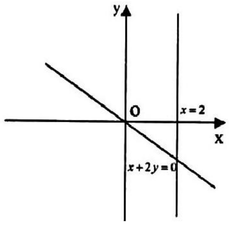
(5) $\Leftrightarrow$ 2 $|x+yi-i|=|x+yi-x+yi+2i|$

$\Leftrightarrow$ 2 $|x+(y-1)i|=2|(y-1)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(y+1)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2$

$\Leftrightarrow (x + y - 1)^2 = (y+1)^2$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-1=y+1 \\ x+y-1=-y-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x+2y=0 \end{array}\right.$$

Vậy, tập hợp điểm M(z) là hai đường thẳng: $x = 2$ và $x + 2y = 0$.

Nguyên nhân:

Ở câu a, HS đã tìm thiếu tập hợp điểm qua việc biến đổi tương đương $|2x + 3| = 4 \Leftrightarrow 2x + 3 = 4$ (sai).

Ở câu b, HS đã nắm vững kiến thức dạng bài tập tìm tập hợp điểm của số phức; tuy nhiên, đến phần cuối lại kết luận sai tập hợp điểm.

Ở câu c, HS đã bị nhầm lẫn ở phép biến đổi tương đương dẫn đến sai hoàn toàn: $x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow (x + y - 1)^2 = (y+1)^2$.

Lời giải đúng:

a) $|z-\bar{z}+3|=4$ (3)

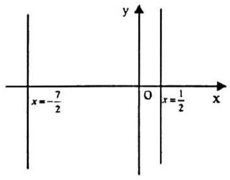
Giả sử số phức $z = x + yi$ ($x, y \in$ R).

$\Rightarrow \bar{z}=x-yi$. Khi đó:

(3) $\Leftrightarrow |x+yi+x-yi+3|=4$

$\Leftrightarrow |2x+3|=4$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+3=4 \\ 2x+3=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{7}{2} \end{array}\right.$$



Vậy, tập hợp điểm M(z) là hai đường thẳng song song với trục tung:

$x = \frac{1}{2}$ và $x = -\frac{7}{2}$.

b) $|z-\bar{z}+1-i|=2$ (4)

Giả sử số phức $z = x + yi$ ($x, y \in$ R).

$\Rightarrow \bar{z}=x-yi$. Khi đó:

(4) $\Leftrightarrow |x+yi+x-yi+1-i|=2$

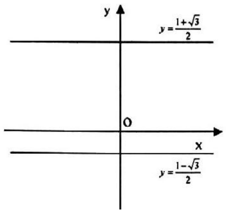
$\Leftrightarrow |1+(2y-1)i|=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{1^2+(2y-1)^2}=2$

$\Leftrightarrow 1+2y-1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow 1+(2y-1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow 1+ 4y^2- 4y + 1 = 4$



$\Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, tập hợp điểm M(z) là hai đường thẳng song song với trục hoành x = $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ và y = $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

c) $2|z-i| = |z - \overline{z} + 2i|$ (5)

Giả sử số phức z = x + yi (x,y $\in$ R).

$\Rightarrow \overline{z} = x - yi$. Khi đó:

(5) $\Leftrightarrow 2\ |x + yi - i| = |x + yi - x + yi + 2i|$

$\Leftrightarrow 2\ |x + (y-1)i| = 2|(y+1)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(y+1)^2}$

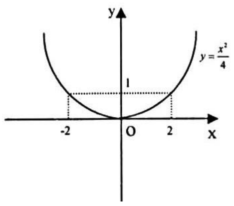
$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 4y = 0$

$\Leftrightarrow$ y = $\dfrac{x^2}{4}$.

Vậy, tập hợp điểm M(z) là parabol: y = $\dfrac{x^2}{4}$.



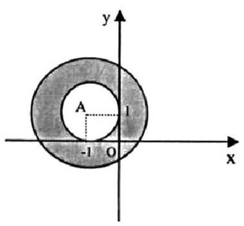
Ví dụ 3: Giả sử M(z) là điểm nằm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Tìm tập hợp các điểm M(z) thoả mãn một trong các điều kiện sau:

a) $1 \le |z + 1 - 1| \le 2$;

b) $|2 + z| > |z - 2|$;

c) $2|z^2 - \overline{z}| = 4$.

Bài giải:



a) $1 \le |z + 1 - i| \le 2$ (6)

Giả sử số phức z = $x + yi$ (x,y $\in$ R).

(6) $\Leftrightarrow 1\ |x + yi + 1 - i| \le 2$

$\Leftrightarrow 1 \le |(x+1)(y-1)i| =\le 2$

$\Leftrightarrow 1 \le \sqrt{(x+1)^2(y-1)^2} \le 2$

$\Leftrightarrow 1 \le (x+1)^2 + (y-1)^2 \le 4$

Vậy, tập hợp các điểm M(z) là hình vành khăn có tâm A(-1;1) và bán kính lớn, bán kính nhỏ lần lượt là R = 2; r = 1.

b) $|2 + z| > |z - 1|$ (7)

Giả sử số phức z = x + yi (x,y $\in$ R).

(7) $\Leftrightarrow |2 + x + yi| > |x + yi - 2|$

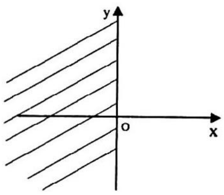
$\Leftrightarrow |(x+2) + yi| > |(x-2) + yi|$

$\Leftrightarrow$

$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} > \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 > x^2 - 4x + 4 + y^2$

$\Leftrightarrow 8x > 0 \Leftrightarrow x > 0$



Vậy, tập hợp các điểm M(z) là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung, tức là các điểm (x, y) mà $x > 0$.

c) $\left|z^2 - (\overline{z})^2\right| = 4$ (8)

Giả sử số phức z = $x + yi$ (x,y $\in$ R). Khi đó:

(8) $\Leftrightarrow \left|(x+yi)^2 - (x-yi)^2\right| = 4$

$\Leftrightarrow \left|x^2 + y^2i^2 + 2xyi - x^2 + 2xyi - yi^2\right| = 4$

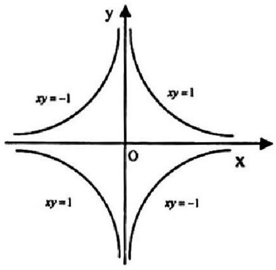
$\Leftrightarrow |4xyi| = 4$

$\Leftrightarrow |xyi| = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2y^2} = 1$

$\Leftrightarrow x^2y^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 1 \\ xy = -1 \end{array}\right.$$



Vậy tập hợp các điểm M(z) là 4 nhánh của 2 hypebol: $xy = 1$ và $xy = -1$.

2. Biện pháp khắc phục: - Cần nắm chắc dạng bài tập biểu diễn hình học của số phức để giải bài toán một cách thuần thục; - Phân biệt rõ cho HS, tránh nhầm sang giải phương trình có chứa trị tuyệt đối của số phức; - Yêu cầu HS nhắc lại kiến thức cơ bản về dạng tổng quát của các đường, các hình để kết luận tập hợp điểm cho đúng; - Rèn luyện kĩ năng tính toán, biến đổi tương đương trong quá trình làm bài tập.

* * *

Bài viết này giúp HS có cái nhìn rõ hơn về dạng biểu diễn hình học của số phức. Thông qua các ví dụ, bài viết cũng chỉ ra sai lầm mà HS thường mắc phải khi giải các bài toán dạng này; đồng thời chỉ ra cách khắc phục, sửa chữa sai lầm như thế nào; từ đó, giúp các em có khả năng tư duy, tính linh hoạt và nhạy bén khi tìm lời giải các bài toán và tránh sai sót có thể xảy ra. Tạo được lòng say mê, khả năng sáng tạo, HS không còn sợ sệt khi giải các bài toán về dạng biểu diễn hình học của số phức.❑

(Xem tiếp trang 38)

bài tập đòi hỏi học sinh khi giải phải vận dụng tổng hợp các kiến thức KN đã học, năng lực thực hiện nhiều thao tác tư duy phối hợp khi đã biết các yếu tố của BT. Để thực hiện tốt biện pháp này GV nên xây dựng hệ thống bài tập bằng cách đi sâu vào những kiến thức có những yếu tố độc đáo và sáng tạo.

4.4. Bồi dưỡng TDST cho HV cần đặt trọng tâm vào việc rèn luyện khả năng phát hiện vấn đề mới, khơi dậy ý tưởng mới. Sáng tạo BT mới là bước quan trọng trong quá trình giải toán, một phương thức rèn luyện TDST toán học. Khi đứng trước một BT, HV dựa trên cơ sở một BT nào đó, dần dần thay đổi, bổ sung dữ kiện hoặc kết luận để tạo nên một BT mới nhưng dựa trên cơ sở lí thuyết chặt chẽ.

Tuy nhiên, để chuẩn bị cho HV có thể giải quyết nhanh gọn những yêu cầu đặt ra BT mới đòi hỏi GV phải đi theo một trình tự nhất định. Trước hết, GV phải hướng dẫn cho HV phân tích các BT mẫu. Sau khi xem xét BT ví dụ mẫu, HV sẽ trải qua quá trình ghi nhớ, lĩnh hội đến chỗ tái hiện và tái tạo trên cơ sở BT ví dụ mẫu: Thứ nhất, yêu cầu HV phát biểu và giải bài tập tương tự dựa vào một bài tập tổng quát lấy làm BT ví dụ mẫu. Thứ hai, GV thay đổi lời văn, số liệu của bài tập dùng làm mẫu để đặt HV vào một tình huống mới. Dạng bài tập này chỉ mới ở mức độ vừa phải nên HV có thể dễ dàng trong việc thực hiện với một sự hứng thú, tích cực cao. GV còn có thể xây dựng hệ thống bài tập bằng cách thêm những giả thiết khác nhau, nhưng phần kết luận và phương pháp giải giống nhau; ví dụ như phát biểu và giải BT tương tự, BT tổng quát từ đó hướng dẫn HV phân tích, phát hiện, giải các bài tập đó và có thể đề xuất BT mới.

Ví dụ: Trên cơ sở BT: *từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau.* Trong BT này các chữ số đã cho có vai trò hoàn toàn giống nhau, khi đó HV chỉ cần sử dụng công thức chỉnh hợp. Từ đó, GV vẫn giữ nguyên yêu cầu đó nhưng thay đổi dữ kiện là *từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau;* khi đó HV thấy được có chữ số 0 là khác biệt vì nó không thể đứng đầu. Tiếp tục phát triển, GV giữ nguyên giả thiết nhưng lại thay đổi yêu cầu BT: *từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau,* khi đó HV thấy rằng vấn đề là ở chỗ khi lập một số chẵn nếu chữ số tận cùng là 0 thì có thể tùy ý chọn chữ số đứng đầu, nhưng nếu chữ số tận cùng khác 0 thì chữ số đứng đầu cũng phải khác 0. Cuối cùng, GV có thể yêu cầu HV sáng tạo ra BT mới dựa trên cơ sở BT trên như: *"từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 5", "từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 4 chữ số khác nhau",...* Trong quá trình này, HV sẽ rèn luyện được khả năng TDST của bản thân một cách tự nhiên, không gượng ép và hiệu quả.

* * *

Vấn đề bồi dưỡng TDST cho HV thông qua dạy học môn *Toán* tại Trường SQCT hiện nay là một quá trình lâu dài, cần tiến hành thường xuyên, liên tục trong tất cả các khâu của quá trình dạy học, các đề thi, đề kiểm tra cần được soạn với yêu cầu kiểm tra được năng lực TDST của HV. Có TDST không chỉ giúp con người giải quyết được các vấn đề nảy sinh trong cuộc sống một cách thích hợp mà còn đảm bảo cho việc hiện thực hóa những năng lực tiềm tàng của mỗi cá nhân... Do vậy, cần nâng cao nhận thức của GV, HV nhà trường trong vấn đề bồi dưỡng TDST cho HV, góp phần hình thành ở HV những phẩm chất của con người thời đại mới đáp ứng yêu cầu nhiệm vụ đặt ra. ❑

---

(1) Hoàng Phê (chủ biên). **Từ điển Tiếng Việt**. NXB *Từ điển Bách khoa*, H. 2010.

Tài liệu tham khảo

1. *Tập bài giảng và tài liệu tham khảo Xác suất thống kê*. Trường Sĩ quan chính trị, 2012.
2. Nguyễn Bá Kim. **Phương pháp dạy học môn Toán**. NXB *Đại học Sư phạm*, H. 2009.
3. Trần Thị Tuyết Oanh. **Giáo trình Giáo dục học**. NXB *Đại học Sư phạm*, H. 2011.
4. Tổng cục Chính trị. **Giáo trình Giáo dục học quân sự** (dùng cho đào tạo cán bộ chính trị cấp phân đội). NXB *Quân đội nhân dân*, H. 2010.

Một số khó khăn và sai lầm...

(Tiếp theo trang 31)

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Huy Đoan (chủ biên) - Đặng Hùng Thắng. **Bài tập nâng cao và một số chuyên đề đại số 10**. NXB *Giáo dục,* H. 2006.
2. Lê Hồng Phong - Nhóm Cự Môn. **Bài giảng chuyên sâu toán trung học phổ thông giải toán Giải tích** (tập 2). NXB *Hà Nội,* 2008.
3. Ngô Long Hậu - Trần Thanh Phong - Nguyễn Đình Thọ. **Giới thiệu đề thi tuyển sinh vào đại học, cao đẳng toàn quốc môn Toán**. NXB *Hà Nội,* 2011.
4. Hoàng Chúng. **Phương pháp dạy học toán ở trung học phổ thông**. NXB *Giáo dục,* H. 1995.