KHUYẾN KHÍCH TÍNH SÁNG TẠO CỦA HỌC SINH TRONG GIẢI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

TRẦN QUANG ĐÔNG* - BÙI VĂN NGHỊ**

Ngày nhận bài: 25/10/2016; ngày sửa chữa: 05/11/2016; ngày duyệt đăng: 29/11/2016.

Abstract: *Learner-centered teaching is becoming a common trend of education in the world and in Vietnam. Instead of providing knowledge for learners, teachers encourage and promote the positive and creativity of students in gaining knowledge through taking part in learning activities. In the article, authors mention role of teacher in promoting the creativity of students in solving the problems of finding the maximum value and minimum value of expression.*

Keywords: *Promoting creativity, problem solving, minimum value, maximum value, expression.*

1. Đặt vấn đề

Môn *Toán* là môn học công cụ, giữ một vai trò hết sức quan trọng trong chương trình trung học phổ thông. Trong đó các bài toán về tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) là những bài toán yêu cầu cao ở học sinh (HS) về tư duy, về kĩ năng. Dạng toán này vừa đa dạng, vừa có nhiều cơ hội cho HS sáng tạo. Mỗi bài toán dạng này có thể nhìn nhận theo nhiều phương diện, nhiều khía cạnh khác nhau, tạo ra nhiều cách giải, trong đó có thể chọn ra cách giải độc đáo, thú vị. Song, đối với HS thì dạng toán này là một trong những dạng toán khó, cần phải chú ý và có những biện pháp để rèn luyện kĩ năng giải dạng toán này, góp phần nâng cao chất lượng dạy học chủ đề này.

Bài viết này đề xuất một số tình huống khuyến khích tính sáng tạo của HS lớp 12 trong dạy học giải toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức.

2. Khuyến khích tính sáng tạo của HS

Trong cuốn sách *"Tiến tới một phương pháp sư phạm tương tác - Bộ ba người dạy, người học và môi trường"*[1] Jean-Marc Denomme' và Madeleine Roy đã quan niệm: Người học là người mà với năng lực cá nhân của mình tham gia vào một quá trình để thu lượm một tri thức mới. Người học trước hết là người tìm cách học và tìm cách hiểu. Người học trước hết là người đi học mà không phải là người được dạy. Người dạy hướng dẫn người học, chỉ cho người học cái đích phải đạt, giúp đỡ, làm cho người học hứng thú học và đưa họ tới đích. Chức năng chính của người dạy là giúp đỡ người học học và hiểu.

Năm 2007, Tổng thống Pháp Sarkozy, trong thư gửi giáo viên (GV), phụ huynh HS nhân ngày khai trường 04/09/2007, đã viết: *"Giáo dục truyền dẫn lòng tự trọng vào tất cả con trẻ và người lớn trên đất nước chúng ta bằng cách giúp họ phát hiện ra mình có tài và khích lệ họ đạt được những gì họ vẫn tin rằng mình có thể làm được. Theo quan điểm của tôi, đó là triết lí cơ bản trong cuộc cải cách triệt để hệ thống giáo dục của chúng ta".*

Trong **Luật Giáo dục** Việt Nam (2005), điều 28, đã ghi rõ: *"Phương pháp giáo dục phổ thông phải phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động, sáng tạo của HS, phù hợp với đặc điểm của từng lớp học, môn học; bồi dưỡng phương pháp tự học, rèn luyện kĩ năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn; tác động đến tình cảm, đem lại niềm vui, hứng thú học tập cho HS".*

Những điều trình bày ở trên thể hiện rõ vai trò của GV là khuyến khích, động viên HS học tập một cách tính tích cực.

Theo nghĩa từ điển: Sáng tạo là là tạo ra những giá trị mới về vật chất hoặc tinh thần [2]. Theo giáo trình Tâm lí học đại cương [3], *Năng lực sáng tạo là năng lực sử dụng các dữ kiện, các tri thức hay khái niệm đã có, năng lực vận dụng chúng để phát hiện những thuộc tính bản chất của các sự vật và giải quyết thành công nhiệm vụ lí luận hay thực hành xác định.*

Trong thực tiễn, các kĩ năng sáng tạo là điều thiết yếu. Người ta cần có chúng để đề xướng và thiết kế sản phẩm, để tiếp thị, đóng gói, quản lí, chăm sóc trẻ, dạy học, chế tạo, trang trí và chăm sóc nhà cửa, kiến trúc, nấu nướng, viết, nghiên cứu và phát triển, thực hiện phát triển có tính đột phá, trang trí cửa hiệu, bày biện cửa hàng... Tính sáng tạo cần thiết cho bất kì ai dự định đưa ra những ý tưởng mới, kĩ thuật mới, hay vào việc giải quyết khó khăn. Tính sáng tạo là công cụ

*** Trường Cao Đẳng Xây dựng số 1**
**** Trường Đại học Sư phạm Hà Nội**

nhận thức thiết yếu chứ không phải một môn học, và nó luôn cần được thực hành. Trong hầu hết các hoạt động học tập, người học sẽ tiếp nhận kiến thức, kĩ năng, kĩ thuật và ý kiến của người khác. Công việc sáng tạo là một ngoại lệ quan trọng, song nó cũng thường bị ngay cả GV cũng như những người khác hiểu lầm và đánh giá thấp [4; tr 296].

Theo Phan Dũng (1991), Công việc sáng tạo là quan trọng đối với GV thuộc bất kì lĩnh vực nào, vì ba lí do chính sau đây: - Để phát triển khả năng suy nghĩ sáng tạo cho người học; - Để tăng cường động cơ, thỏa mãn nhu cầu của con người muốn tạo nên điều gì đó và được thừa nhận về điều đó; - Để tạo cơ hội thăm dò cảm xúc và phát triển các kĩ năng tự biểu hiện [5].

Tri thức (bao gồm các khái niệm, định lí, thuật giải, phương pháp) và kĩ năng là cơ sở của sự sáng tạo. Cần phải có kiến thức để hiểu được mục đích của hành động, biết được điều kiện, cách thức để đi đến kết quả, để thực hiện hành động. Cần phải có kĩ năng để hành động có hiệu quả trong những điều kiện khác nhau. Để có được một lời giải bài toán mang tính sáng tạo, trước hết HS cần đạt được sự nhuần nhuyễn nhất định, sau đó là có tính linh hoạt, uyển chuyển trong suy nghĩ giải quyết vấn đề.

3. Một số tình huống khuyến khích tính sáng tạo của HS trong giải toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức

Trên cơ sở nghiên cứu các dạng toán và các phương pháp giải những dạng toán đó, chúng tôi chọn lọc và thiết kế thành những hệ thống bài toán có dụng ý rèn luyện một hoặc một số thành tố nào đó của tư duy sáng tạo cho HS. GV cần tạo ra những hệ thống bài toán mà ở đó sau mỗi bài toán, HS thường gặp trở ngại trong cách giải quyết vấn đề, trong cách suy nghĩ; khi đó GV cần khuyến khích HS vượt qua chướng ngại và cần có sự sáng tạo. Vai trò của GV trong quá trình hoạt động sáng tạo là phải giúp HS kiểm soát được quá trình suy nghĩ khi gặp những khó khăn ở họ. Điều này được thực hiện thông qua sự lựa chọn những hoạt động của GV nhằm giúp HS vượt qua được những trở ngại, thông qua hoạt động khuyến khích, giải thích và thảo luận với HS.

Tình huống 1. Đối với những bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức chỉ chứa một biến số GV vừa yêu cầu HS vận dụng đúng và nhuần nhuyễn những phương pháp thông thường, đồng thời khuyến khích HS linh hoạt, mềm dẻo trong quá trình vận dụng. Tình huống này được thể hiện qua hệ thống bài toán sau:

Bài 1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x^3 - x^2 - x + 3$ trên [- 2; 2].

Bài 2. Tìm GTLN, GTNN của $y = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn [0;1].

Bài 3. Tìm GTLN, GTNN của hàm số. $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ trên đoạn [- 2; 2].

Bài 4. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

$y = \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{\sin^2 x - \sin x + 1}$ trên R.

Bài 5. Tìm GTNN của hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài 6. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x - x$, trên đoạn .

Bài 7. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$.

Bài 8. Tìm GTLN, GTNN của hàm số. $y \quad \sqrt{x \quad 2} \quad \sqrt{4 \quad x} \quad \sqrt{(x \quad 2)(4 \quad x)}$

Bài 9. Tìm GTLN của $y = -\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 5$.

Hệ thống này được chúng tôi xây dựng theo dụng ý sau đây: Các bài 1, 2 chỉ nhằm rèn luyện *tính nhuần nhuyễn* tìm GTLN. GTNN của biểu thức một biến số trên một đoạn theo quy tắc đã trình bày trong sách giáo khoa, nhưng đến bài 1.3 không thể áp dụng một cách *"máy móc"* cách làm của các bài 1, 2 vì hàm số đã cho không liên tục trên đoạn đã cho. Đến bài 4, sau khi đặt ẩn phụ *t = sinx*, HS cũng không thể làm tương tự bài 3, vì biến số mới là t không xét trên toàn trục số mà chỉ xét trên đoạn [-1; 1]. Tiếp theo là các bài toán 5, 6 rèn luyện tính nhuần nhuyễn tìm GTLN, GTNN của biểu thức một biến số trên một khoảng hoặc nửa khoảng, khác với những bài toán từ 1-4, tạo nên một sự vận dụng *linh hoạt*. Với những bài này HS có thể dùng phương pháp tìm tập giá trị của hàm số để suy ra GTLN và GTNN. Tuy nhiên, từ bài 4-6, mức độ khó sẽ tăng lên, *đòi hỏi sự sáng tạo* hơn: Vừa phải đặt ẩn phụ, vừa cần tập giá trị của y để phương trình có nghiệm trên R mà là có nghiệm trên một đoạn. Các bài 7, 8, 9 gồm những hàm số không thuận lợi khi vận dụng quy tắc trong sách giáo khoa, HS cần phải khéo léo đặt ẩn phụ hoặc phải tìm ra những cách khác, như tìm tập giá trị, sử dụng bất đẳng thức, phương pháp lượng giác, phương pháp hình học...

Tình huống 2. Đối với những bài toán tìm GTLN. GTNN của biểu thức chứa hơn một biến, có thể quy về một biến số, ngoài việc khảo sát hàm số, GV có thể khuyến khích HS tìm cách giải khác hay hơn, sáng tạo hơn. Trong tình huống này chúng tôi đề xuất hệ thống bài toán sau:

Bài 10. Cho *x, y > 0* và *xy* = 1. Tìm GTNN của biểu thức $T = x^2 + 16y$.

Bài này có thể rút $y = 1/x$ quy về hàm số một biến $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ với *x > 0* rồi khảo sát hàm số. Tuy nhiên có thể khuyến khích HS sử dụng bất đẳng thức một cách sáng tạo: T = $x^2 + 8y + 8y \geq 3\sqrt[3]{16x^2y^2} = 12.$ Đẳng thức xảy ra khi x = 2. Vậy GTNN của T là 12, khi x = 2.

Bài 11. Cho *x, y > 0* và *x + y = 1*. Tìm GTNN của biểu thức $T = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$

Có thể rút *y = 1 - x*, với *0 < x < 1* quy về hàm số một biến số rồi khảo sát hàm số hoặc sáng tạo hơn là sử dụng bất đẳng thức $T \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \geq \frac{4}{x+y} = 4$. Đẳng thức xảy ra khi x = y = $\frac{1}{2}$.

Bài 12. Cho *x, y > 0* và *x + y = 1*. Tìm GTNN của biểu thức T = $\frac{1}{x} + \frac{2}{y}$.

Nếu HS vẫn làm rập khuôn như bài 11: $T \geq \frac{4}{\sqrt{xy}} \geq \frac{8}{x+y} = 8$ thì sai lầm, vì đẳng thức không xảy ra. Bài này cần sáng tạo hơn so với bài 11 ở phương pháp thêm bớt:

T = $\frac{2}{1-x} - 2 + \frac{1}{x} - 1 + 3 =$ $\frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} + 3$. Mà $\frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2x}{1-x}.\frac{1-x}{x}} = 2\sqrt{2}$

nên T ≥ $\sqrt{2} + 3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = $\sqrt{2} - 1$.

Vậy GTNN của B là $\left(\sqrt{2}+3\right)$ khi x = $\sqrt{2} - 1$.

Bài 13. Cho *x, y ≥ 0*, 3x + 4y = 5. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức T = $x^2 + y^2$.

Từ giả thiết đã cho *3x + 4y = 5*, dễ dàng rút được *y* = $\frac{5-3x}{4}$. Điều kiện y ≥ 0 dẫn đến x ≤ 5/3. Thế y vào biểu thức T ta được:

T = $x^2 + \left(\frac{5-3x}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}(25x^2 - 30x + 25)$. Dựa vào đồ thị hoặc bảng biến thiên với x thuộc đoạn [0 ; 5/3] ta có:

GTNN của T là 1, khi x = 3/5 và y = 4/5 ;

GTLN của T là 25/9, khi x = 5/3 và y = 0.

Với bài này ta cũng có thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski để tìm GTNN của T. Tuy nhiên việc tìm GTLN cũng không phải dễ dàng.

Tình huống 3. Đối với những bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức chứa hơn một biến và khó có thể quy về một biến số được, GV cần khuyến khích HS linh hoạt, mềm dẻo hơn trong cách giải quyết vấn đề. Có thể thông qua hệ thống bài toán sau:

Bài 14. Cho x, y > 1 và 3x + 4y ≤ 5. Tìm GTLN và GTNN của T = $x^2 + y^2$.

Khác với bài 13, ở bài này, với giả thiết 3x + 4y ≤ 5 ta không thể rút y theo x được; cũng không thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski để tìm GTNN của T vì đẳng thức xảy ra khi x, y không thuộc điều kiện đã cho trong giả thiết. Điều này đòi hỏi HS phải có sự sáng tạo nhất định.

Vẽ đường thẳng có phương trình 3x + 4y = 5 trên hệ tọa độ Đề Các, với miền x, y không nhỏ hơn 1, các điểm M(x ; y) thoả mãn giả thiết thuộc các đoạn AB và CD trên, với A$\left(\frac{5}{3};\ 0\right)$, B$\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$, C$\left(\frac{1}{3};\ 1\right)$, D$\left(0;\ \frac{5}{4}\right)$.

Từ đó ta được:

GTLN của T là $\frac{25}{9}$, đạt được khi x = $\frac{5}{3}$ và y = 0;

GTNN của T là $\frac{10}{9}$, đạt được khi x = $\frac{1}{3}$ và y = 1;

Bài 15. Cho x, y khác 0, thay đổi và thỏa mãn: $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$(*)

Tìm GTLN của biểu thức A = $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

Từ (*) ta khó có thể quy về một biến số, GV có thể khuyến khích HS biến đổi (*) về dạng xuất hiện $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ như trong kết luận.

$$(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \Leftrightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy}.$$

Đặt $\frac{1}{x} = a; \frac{1}{y} = b$, bài toán trở thành:

Cho a, b thỏa mãn $a + b = a^2 + b^2 + ab$, tìm GTLN của $A = a^3 + b^3$.

Ta có $A = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2+b^2-ab) = (a+b)^2$.

Từ giả thiết $a+b = a^2+b^2-ab = \left(a-\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \Rightarrow a+b \geq 0$.

Đặt $a+b=S$ và xét hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b = a^2+b^2-ab \\ a+b=S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=(a+b)^2-3ab \\ a+b=S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=S \\ ab=\dfrac{S^2-S}{3} \end{cases}$$

$$\exists a,b \Leftrightarrow S^2 \geq \frac{4(S^2-S)}{3} \Leftrightarrow S^2-4S \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq S \leq 4 \Rightarrow \mathrm{A}=(a+b)^2 \leq 16$$

$\leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq S \leq 4 \Rightarrow \mathrm{A} = (a+b)^2 \leq 16$

Vậy khi $x = y = ½$.

Bài 16. Cho $\begin{cases} xy+x+y=1 \\ x,y>0 \end{cases}$. Tìm GTNN của $T = x^4 + y^4$.

Do vai trò bình đẳng giữa và y, ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi $x=y=\alpha$.

Từ giả thiết ta tính được $\alpha = \sqrt{2}-1$.

Khi đó: $x^4+\alpha^4+\alpha^4+\alpha^4 \geq 4\sqrt[4]{x^4.\alpha^4.\alpha^4.\alpha^4} = 4x\alpha^3$ (1)

$y^4+\alpha^4+\alpha^4+\alpha^4 \geq 4\sqrt[4]{y^4.\alpha^4.\alpha^4.\alpha^4} = 4y\alpha^3$ (2)

$x^4+y^4+\alpha^4+\alpha^4 \geq 4\sqrt[4]{x^4.y^4.\alpha^4.\alpha^4} = 4xy\alpha^2$

=> $\alpha\left(x^4+y^4+\alpha^4+\alpha^4\right) \geq 4xy\alpha^3$ (3)

Cộng từng vế của (1) (2) (3):

$(1+\alpha)\left(x^4+y^4\right)+(6+\alpha)\alpha^4 \geq 4\alpha^3.(xy+x+y)=4\alpha^3$.

Vậy $T \geq \dfrac{4\alpha^3-6\alpha^4(6+\alpha)}{1+\alpha}$ (hằng số), GTNN của T là $2\left(\sqrt{2}-1\right)^4$ khi $x=y=\sqrt{2}-1$.

4. Kết luận

Với vai trò là người hướng dẫn người học, GV cần chỉ cho người học cái đích phải đạt, làm cho người học hứng thú học và giúp đỡ họ tới đích. Chúng ta cần khuyến khích người học tự giác, tích cực để đạt được những gì họ vẫn tin rằng mình có thể làm được. ❑

Tài liệu tham khảo

[1] Jean-Marc Denomme' - Madeleine Roy (2000). *Tiến tới một phương pháp sư phạm tương tác - Bộ ba người dạy, người học và môi trường*. NXB Thanh niên.

[2] Hoàng Phê (1996). *Từ điển tiếng Việt*. NXB Đà Nẵng.

[3] Nguyễn Quang Uẩn (chủ biên) (2002). *Giáo trình Tâm lí học đại cương*. NXB Đại học Sư phạm.

[4] Petty G. (1998). *Dạy học ngày nay*. NXB Stanley Thornes.

[5] Phan Dũng (1991). *Phương pháp luận sáng tạo khoa học kĩ thuật*. Giáo trình Đại học Tổng hợp TP. Hồ Chí Minh.

Khả năng biến đổi bài toán hình học...

(Tiếp theo trang 169)

vẫn còn ít được quan tâm giới thiệu và vận dụng. Các giáo viên toán tương lai ít được rèn luyện và thực hành với việc đặt ra bài toán mới hay chuyển từ bài toán "đóng" dạng chứng minh sang bài toán "mở" dạng khảo sát. Vì vậy nên khuyến khích các giáo viên toán tương lai nghiên cứu và thực hành vấn đề này để tăng cường năng lực dạy học sau này. ❑

Tài liệu tham khảo

[1] Artigue, M. - Blomhoj, M. (2013). *Conceptualizing inquiry-based education in mathematics*. ZDM-The international journal on mathematics education.

[2] Rocard, M. - Csermely, P. - Jorde, D. - Lenzen, D. - Walberg-Henriksson, H. - Hemmo V. (2007). L'enseignement scientifique aujourd'hui: une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe. Commission Européenne, Direction générale de la recherche, Science, économie et société.

[3] Brown, S. - Walter, M. (2005). *The art of problem posing (3rd ed.)*. New York: Routledge.

[4] Leikin, R. - Grossman. (2013). *Teachers modify geometry problems : from proof to investigation*. Educational Studies in Mathematics, 82, pp. 515-531.

[5] Da Ponte, J. P. (2007). *Investigations and explorations in the mathematics classroom*. ZDM- The International Journal on Mathematics Education, 39, pp. 419-430.

[6] Leikin, R. (2004). *Towards high quality geometrical tasks: Reformulation of a proof problem*. In M. J. Hoines - A. B. Fuglestad (Eds.). Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 3, pp. 209-216.

[7] Stoyanova, E. (1998). *Problem posing in mathematics classrooms*. In A. McIntosh & N. Ellerton (Eds.), Research in mathematics education: A contemporary perspective (pp. 164-185). Perth: MASTEC Publication.

[8] Pehkonen, E. (1995). *Using open-ended problem in mathematics*. ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 27(2), pp. 67-71.

[9] Nguyễn Lê Nguyên Thảo (2004). *Nghiên cứu khả năng thay đổi bài toán hình học từ chứng minh sang khảo sát của sinh viên sư phạm toán*. Luận văn thạc sĩ Khoa học giáo dục, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế.