

# Ứng dụng thuật toán LPSS-EIS trong tính toán xác suất hư hỏng của kết cấu giàn thép sử dụng phân tích trực tiếp

Application of LPSS-EIS method for calculating failure probability of steel trusses using direct analysis

> TS MAI SỸ HÙNG

Khoa Công trình Thủy, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, Email: hungms@huce.edu.vn

## TÓM TẮT

Kết cấu giàn thép sử dụng rất phổ biến hiện nay nhờ khả năng sử dụng vật liệu hiệu quả, vượt nhịp tốt, kiểu dáng đẹp và đa dạng. Đi cùng với sự ứng dụng mạnh mẽ của kết cấu giàn thép, kỹ thuật phân tích trực tiếp được quan tâm nghiên cứu và ứng dụng ngày càng nhiều vào thiết kế dạng công trình nhằm đánh giá chính xác hơn ứng xử phi tuyến tính phi đàn hồi thực tế của công trình. Do đặc điểm của thông số thiết kế và vật liệu là ngẫu nhiên, xác suất hư hỏng công trình luôn được xét đến trong thiết kế nhằm đảm bảo độ tin cậy của công trình trong quá trình sử dụng. Với nghiên cứu này, thuật toán tính toán xác suất kết hợp giữa 2 kỹ thuật lấy mẫu phân tầng một phần "Latin hóa" ("Latinized" Partially Stratified Sampling) (LPSS) và lấy mẫu quan trọng nâng cao (effective importance sampling) (EIS) LPSS-EIS được ứng dụng để xác định xác suất phá hoại của hệ giàn thép sử dụng phân tích phi tuyến. Hiệu quả của phương pháp được so sánh với các kỹ thuật thông dụng Monte Carlo Simulation (MCS), LPSS. Kết quả phân tích giàn thép không gian 72 thanh cho thấy LPSS-EIS rất hiệu quả khi tính toán chính xác xác suất phá hủy của công trình với hệ số COV nhỏ hơn rất nhiều so với các thuật toán MCS và LPSS.

**Từ khóa:** Giàn thép; phân tích trực tiếp; xác suất; Monte Carlo; Latin Hypercube.

## ABSTRACT

Steel truss structures are very popular nowadays thanks to their efficient use of materials, good span, and beautiful and diverse designs. Along with the strong application of steel truss structure, direct analysis techniques are interested in researching and applying more and more to the design of this type of structure to more accurately evaluate structural nonlinear behaviors. Because the design parameters and materials are random in the reality, the structural failure probability of the structure is always considered in the design to ensure the reliability of the structure during use. In this study, the hybrid algorithm combined two techniques of "Latinized" Partially Stratified Sampling (LPSS) and effective importance sampling (EIS) LPSS-EIS is applied to determine the failure probability of the steel truss system using direct analysis. The effectiveness of the method is compared with the commonly used techniques of Monte Carlo Simulation (MCS) and LPSS. The analysis results of the 72-bar space steel truss show that LPSS-EIS is very effective when accurately calculating the failure probability of the structure with a much smaller COV than the MCS and LPSS algorithms.

**Abstract:** Truss; Advanced analysis; Probability; Monte Carlo; Latin Hypercube.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Nhờ ưu điểm nổi trội của vật liệu thép về khả năng chịu lực (kéo và nén), khả năng biến dạng, cùng độ bền cao, các kết cấu thép nói chung và kết cấu giàn nói riêng ngày càng được sử dụng phổ biến với các đặc điểm như vượt nhịp lớn, phát huy tối đa sự làm việc của vật liệu, hình thức đẹp, phong phú. Tiết diện kết cấu thép thường thanh mảnh, khả năng chịu biến dạng cao nên các đặc tính phi tuyến hình học và phi tuyến vật liệu cần được xét đến trong quá

trình tính toán thiết kế. Các phương pháp phân tích kết cấu thép truyền thống được chia thành hai bước gồm: (1) xác định nội lực của hệ kết cấu sử dụng phân tích tuyến tính đàn hồi và (2) thiết kế, kiểm toán cho từng cấu kiện riêng lẻ có xét đến tính chất phi tuyến bằng các công thức thiết kế cho sẵn trong các tiêu chuẩn hiện hành như AISC LRFD [1], Eurocode [2], v.v... Phương pháp tiếp cận gián tiếp này không mô tả được các ứng xử phi tuyến của công trình trong quá trình chịu tải trọng. Đồng thời, việc thiết kế riêng lẻ cho từng cấu

kiện vừa không đem lại hiệu quả kinh tế cao nhất vừa không đảm bảo sự tương thích của chúng trong sự làm việc chung của công trình. Để khắc phục nhược điểm này, các phương pháp phân tích trực tiếp với đặc điểm là cho phép xét đến cả phi tuyến hình học và phi tuyến vật liệu của công trình đang được ứng dụng ngày càng nhiều [3-6].

Bên cạnh đó, phân tích độ tin cậy công trình thu hút sự quan tâm rất lớn của các nhà nghiên cứu do bản chất thực tế của tải trọng tác dụng, kích thước hình học của kết cấu và đặc điểm của vật liệu là đại lượng không chắc chắn. Nhiều nghiên cứu liên quan đến độ tin cậy của cấu trúc đã được báo cáo trong tài liệu sử dụng các kỹ thuật và thuật toán khác nhau, ví dụ: xấp xỉ bậc nhất và bậc hai (FORM, SORM) [7-8], mô phỏng Monte Carlo (MCS) [9], phương pháp bề mặt đáp ứng [10], lấy mẫu quan trọng (IS) [11], kỹ thuật lấy mẫu Latin Hypercube (LHS) [12], Mô phỏng tập hợp con (SS) [13], v.v. Tuy nhiên, đối với kết cấu thép, các trạng thái giới hạn của hư hỏng kết cấu khó được biểu diễn dưới dạng hàm toán học nên các phương pháp phân tích để phân tích độ tin cậy như FORM và SORM thường cho sai số tương đối lớn. Bên cạnh đó, nếu các phương pháp lấy mẫu như MCS và LHS được sử dụng, thì cần phải có một số lượng mẫu rất lớn vì xác suất hỏng hóc của một cấu trúc là rất nhỏ. Ví dụ: phương pháp MCS yêu cầu hơn một triệu mẫu để đánh giá chính xác giá trị nhỏ ( $< 0,1\%$ ) của xác suất lỗi của một chức năng. Do đó, thời gian tính toán của các phương pháp lấy mẫu là quá cao. Gần đây, Trương và cộng sự đã đề xuất phương pháp kết hợp giữa kỹ thuật lấy mẫu thông thường như MCS và LHS với kỹ thuật lấy mẫu quan trọng IS nhằm xác định xác suất hư hỏng của kết cấu thép [14-16]. Phương pháp này cho thấy hiệu quả rất cao thông qua việc giảm đáng kể số lần phân tích kết cấu trong khi độ chính xác vẫn được đảm bảo.

Trong bài báo này, thuật toán tính toán xác suất kết hợp giữa 2 kỹ thuật lấy mẫu phân tầng một phần "Latin hóa" ("Latinized" Partially Stratified Sampling) (LPSS) và lấy mẫu quan trọng nâng cao (effective importance sampling) (EIS) do Kim và Trương [16] đề xuất được ứng dụng để xác định xác suất phá hoại của hệ giàn thép sử dụng phân tích phi tuyến. Hiệu quả của phương pháp được so sánh với các kỹ thuật thông dụng Monte Carlo Simulation (MCS), LPSS. Các phần tiếp theo của bài báo được tổ chức như sau. Trong phần 2, nội dung kỹ thuật lấy mẫu phân tầng một phần "Latin hóa" ("Latinized" Partially Stratified Sampling) (LPSS) được trình bày. Tiếp theo là kỹ thuật lấy mẫu quan trọng nâng cao (EIS) được trình bày trong phần 3 và trình tự các bước chính của thuật toán LPSS-EIS được giới thiệu trong phần 4. Kết quả nghiên cứu hệ giàn không gian 72 thanh sẽ được nêu ra trong phần 5 và cuối cùng là kết luận.

## 2. KỸ THUẬT LẤY MẪU PHÂN TẦNG MỘT PHẦN "LATIN HÓA" ("LATINIZED" PARTIALLY STRATIFIED SAMPLING) (LPSS)

Kỹ thuật lấy mẫu LPSS được Shields và Zhang [17] đề xuất vào năm 2016. Đây được xem là một trong những phương pháp lấy mẫu mới nhất và hết sức mạnh mẽ. LPSS được phát triển bằng cách kết hợp các phương pháp lấy mẫu phân tầng một phần (partially stratified sampling) (PSS) và lấy mẫu phân tầng "Latin hóa" ("Latinized" stratified sampling) (LSS). Cần lưu ý rằng PSS và LSS lần lượt là những cải tiến của phương pháp lấy mẫu phân tầng (stratified sampling) và LHS. Do đó, LPSS có thể giảm phương sai của các ước lượng thống kê một cách hiệu quả hơn nhiều so với các phương pháp lấy mẫu thông thường như MCS, LHS, lấy mẫu phân tầng, v.v.

LSS được phát triển dựa trên LHS trên cơ sở sử dụng mảng trực giao (OA-LHS) khi kích thước của tất cả các tầng đều bằng nhau. Tuy nhiên, so với OA-LHS, LSS trực quan hơn và dễ dàng áp dụng trong các bài toán khác chiều. Các bước chính của LSS có thể được minh

họa bằng cách sử dụng một ví dụ để tạo 9 mẫu theo 2 chiều được trình bày trong Hình 1 như sau:

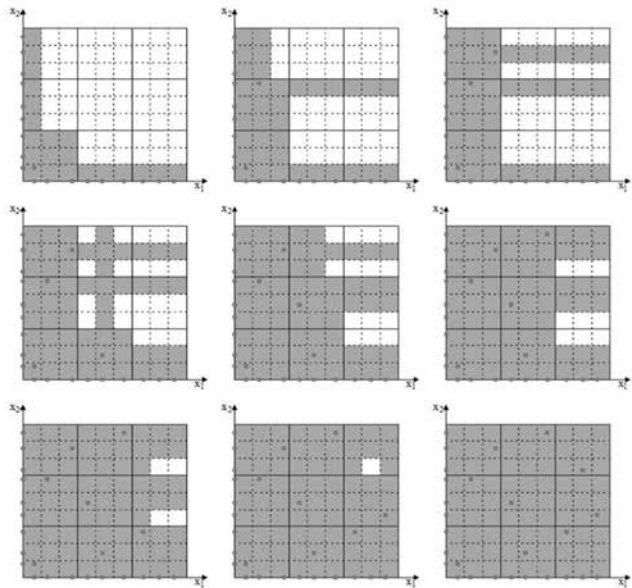
$$a + b + c$$

Bước 1: Sử dụng LHS tạo 9 mẫu của 2 biến  $x_1$  và  $x_2$  như trong Hình 1.

Bước 2: Chia miền biến ngẫu nhiên thành 9 tầng tương ứng với số lượng mẫu được thể hiện bằng nét liền trên Hình 1.

Bước 3: Trong mỗi tầng, nhóm ngẫu nhiên một điểm mẫu của  $x_1$  với một điểm mẫu của  $x_2$  để tạo nên mẫu  $X = (x_1, x_2)$ . Các tầng và các ô liên quan đến các điểm này không được phép tạo các mẫu tiếp theo. Các ô này được tô bóng trong Hình 1.

Bước 4: Lặp lại bước 3 cho đến khi tất cả 9 mẫu được tạo.



Hình 1. Minh họa tạo 9 mẫu 2 chiều bằng LSS [16]

Có thể nhận thấy rằng LSS trong 1 chiều là chính là LHS. Dựa trên LSS, LPSS được đề xuất để tạo mẫu của không gian N chiều  $\Phi$  như sau:

Bước 1: Định nghĩa N và  $N_{\text{mẫu}}$  là số chiều và tổng số mẫu.

Bước 2: Chia không gian  $\Phi$  thành  $N_s$  không gian con  $N_i$  chiều

$\Theta_i (i=1, \dots, N_s)$  thỏa mãn các điều kiện sau: (1)  $\bigcup_{i=1}^{N_s} \Theta_i = \Phi$ , (2)

$\Theta_j \cap \Theta_k = \emptyset$  với  $j \neq k$ , (3)  $\sum_{i=1}^{N_s} N_i = N$ .

Bước 3: Chia các miền con  $\Theta_i (i=1, \dots, N_s)$  thành  $M_i$  tầng  $\Omega_{ik} (k=1, \dots, M_i)$  thỏa mãn điều kiện:  $N_{\text{mẫu}} = M_i^{N_i} (i=1, \dots, N_s)$ .

Bước 4: Áp dụng LSS để tạo mẫu cho tầng  $\Omega_{ik} (i=1, \dots, N_s; k=1, \dots, M_i)$ .

Bước 5: Tạo mẫu của các không gian con  $\Theta_i (i=1, \dots, N_s)$  bằng cách nhóm ngẫu nhiên các mẫu của tầng  $\Omega_{ik} (i=1, \dots, N_s; k=1, \dots, M_i)$ .

Bước 6: Tạo mẫu cho không gian  $\Phi$  bằng cách nhóm ngẫu nhiên các mẫu của các không gian con  $\Theta_i (i=1, \dots, N_s)$ .

Các thông tin bổ sung về PSS, LSS và LPSS có thể được tìm thấy trong tài liệu [17].

## 3. KỸ THUẬT LẤY MẪU QUAN TRỌNG NÂNG CAO (EIS)

EIS được đề xuất bởi Trương và Kim [14]. Trong EIS, hàm trạng thái giới hạn của công trình chịu tải trọng khi sử dụng phân tích trực tiếp như sau:

$$G(X) = \frac{R_{xm} - 1}{x_m} \quad (1)$$

Trong đó  $X = (y_1, \dots, y_l, x_1, \dots, x_m)$  là vec-tơ biến ngẫu nhiên của hệ công trình với  $y_i (i = 1, \dots, l)$  là biến ngẫu nhiên liên quan đến kích thước hình học của công trình và đặc tính của vật liệu và  $x_i (i = 1, \dots, m)$  là biến ngẫu nhiên của tải trọng;  $R_{xm}$  là khả năng chịu tải của công trình xác định theo tải trọng tác dụng  $x_m$ .  $R_{xm}$  được xác định như sau: trạng thái chịu tải của công trình khi chịu các tải trọng  $(x_1, \dots, x_{m-1})$  được xác định trước, sau đó trạng thái làm việc của hệ công trình khi chịu tải trọng  $x_m$  được tiếp tục tính toán.

Xác suất phá hủy của công trình  $P_f$  được xác định như sau dựa trên kỹ thuật IS:

$$P_f = P[G(X) \leq 0] = \int_{G(X) \leq 0} f_{R_{xm}}(r) g_{x_m}(x) \frac{f_{x_m}(x)}{g_{x_m}(x)} dx \quad (2)$$

Trong đó  $f_{R_{xm}}(r)$  và  $f_{x_m}(x)$  là hàm phân bố xác suất của  $R_{xm}$  và  $x_m$ ,  $g_{x_m}(x)$  là hàm phân bố xác suất IS của  $x_m$ .

Xác suất phá hủy công trình sử dụng IS được tính gần đúng như sau:

$$P_{f,IS} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(x_m^i) \quad (3)$$

Trong đó:

$$I(x_m^i) = \begin{cases} \frac{f_{x_m}(x_m^i)}{g_{x_m}(x_m^i)} & \text{khi } R_{xm}^i = R_{xm}(x_1^i, x_2^i, \dots, x_{m-1}^i) \leq x_m^i \\ 0 & \text{khi } R_{xm}^i = R_{xm}(x_1^i, x_2^i, \dots, x_{m-1}^i) > x_m^i \end{cases} \quad (4)$$

Với  $x_m^i (i = 1, \dots, N)$  là các mẫu của  $x_m$  sử dụng  $g_{x_m}(x)$ .

Công thức (2) và (3) cho thấy  $N$  lần phân tích kết cấu được sử dụng để tính toán  $P_{f,IS}$  mà không phụ thuộc vào cách tạo mẫu của  $x_m$ . Nếu  $N$  giá trị của  $R_{xm}$  đã biết,  $P_{f,IS}$  chỉ phụ thuộc vào  $N$  mẫu  $x_m$ . Trên cơ sở đó, sai số khi tính  $P_{f,IS}$  có thể giảm thiểu bằng cách lặp lại nhiều lần quá trình tạo  $N$  mẫu  $x_m$  trong thuật toán EIS. Lúc này, xác suất phá hủy của công trình được xác định như sau:

$$P_{f,EIS} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P_{f,IS}^j \quad (4)$$

Trong đó  $k$  là hệ số lặp trong EIS và  $P_{f,IS}^j$  là giá trị của  $P_{f,IS}$  trong lần tạo mẫu thứ  $j$  của  $N$  mẫu  $x_m$ .

#### 4. KỸ THUẬT KẾT HỢP LPSS VÀ EIS (LPSS-EIS):

LPSS-EIS được kết hợp từ 2 kỹ thuật trên với các bước chính như sau:

Bước (1): Xác định biến ngẫu nhiên cho bài toán  $X = (y_1, \dots, y_l, x_1, \dots, x_m)$  trong đó  $x_m$  được chọn để sử dụng LPSS-EIS.

Bước (2): Tạo  $N$  mẫu  $Y^i = (y_1^i, \dots, y_l^i, x_1^i, \dots, x_{m-1}^i) (i = 1, \dots, N)$  sử dụng phương pháp kỹ thuật LPSS.

Bước (3): Xác định khả năng chịu tải của công trình

$R_{xm}^i (i = 1, \dots, N)$ .

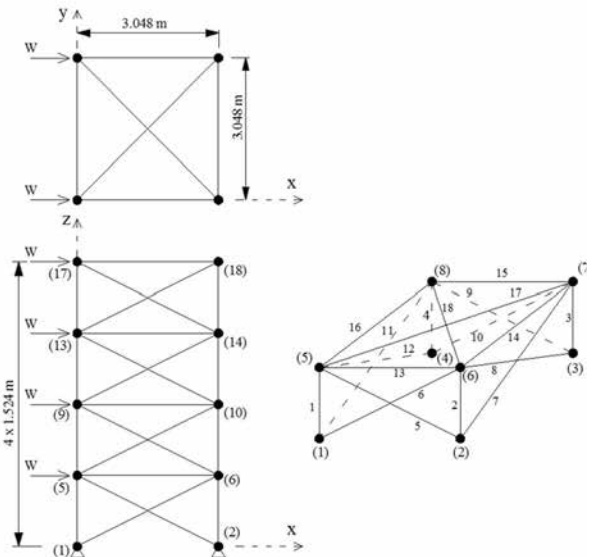
Bước (4): Chọn hàm phân bố xác suất  $g_{x_m}(x)$  cho  $x_m$ .

Bước (5): Xác định  $k$  giá trị  $P_{f,IS}^j$ .

Bước (6): Xác định  $P_f$  sử dụng công thức (4).

#### 5. TRƯỜNG HỢP NGHIÊN CỨU

Một giàn không gian 72 thanh với kích thước như trên Hình 2 sẽ được nghiên cứu trong phần này. Các thanh giàn được chia thành 16 nhóm tiết diện khác nhau là: (1) **A<sub>1</sub>-A<sub>4</sub>**; (2) **A<sub>5</sub>-A<sub>12</sub>**; (3) **A<sub>13</sub>-A<sub>16</sub>**; (4) **A<sub>17</sub>-A<sub>18</sub>**; (5) **A<sub>19</sub>-A<sub>22</sub>**; (6) **A<sub>23</sub>-A<sub>30</sub>**; (7) **A<sub>31</sub>-A<sub>34</sub>**; (8) **A<sub>35</sub>-A<sub>36</sub>**; (9) **A<sub>37</sub>-A<sub>40</sub>**; (10) **A<sub>41</sub>-A<sub>48</sub>**; (11) **A<sub>49</sub>-A<sub>52</sub>**; (12) **A<sub>53</sub>-A<sub>54</sub>**; (13) **A<sub>55</sub>-A<sub>58</sub>**; (14) **A<sub>59</sub>-A<sub>66</sub>**; (15) **A<sub>67</sub>-A<sub>70</sub>**; (16) **A<sub>71</sub>-A<sub>72</sub>**. Tải trọng gió được mô phỏng dưới dạng tải trọng điểm tại các nút giàn theo phương trục X. Tải trọng chết và tải trọng trực tiếp được chuyển đổi thành tải trọng điểm tại mọi nút giàn. Tổ hợp tải trọng được xem xét là (1.2D+0.5L+1.7W) trong đó D là tĩnh tải, L là hoạt tải và W là tải trọng gió. Các đặc tính ngẫu nhiên của biến thiết kế được thể hiện trong Bảng 1. Tiết diện của 16 biến này lấy bằng: (7419.340; 1690.319; 1045.159; 1045.159; 4658.055; 1283.868; 1045.159; 1045.159; 2238.705; 1045.159; 1045.159; 1045.159; 1045.159; 1045.159; 1045.159; 1045.159) (mm<sup>2</sup>) dựa trên kết quả tối ưu được trình bày trong tài liệu [15]. Hai thuật toán MCS và IS được sử dụng để đánh giá hiệu quả của LPSS-EIS.



Hình 2. Giàn không gian 72 thanh

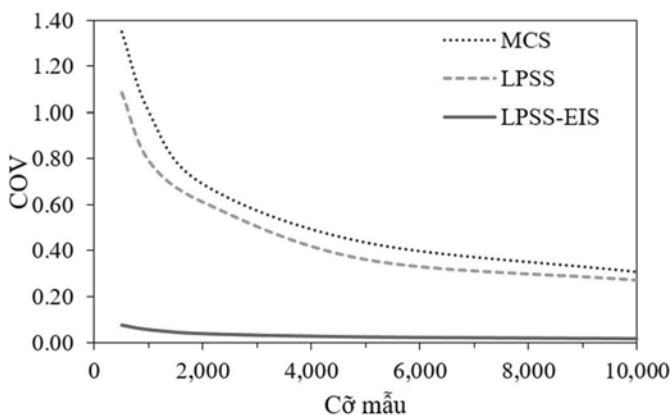
Bảng 1. Đặc tính của biến ngẫu nhiên

Loại	Biến ngẫu nhiên	Giá trị danh nghĩa	Trung bình/ Danh nghĩa	COV	Dạng phân bố
Vật liệu	$E$	68.95 (GPa)	0.993	0.034	Lognormal
	$F_y$	172.375 (MPa)	1.10	0.06	Lognormal
Tiết diện	$A_i$	-	1.00	0.05	Normal
	$l_i$	-	1.00	0.05	Normal
Tải trọng	$D$	50 (KN)	1.05	0.10	Normal
	$L$	50 (KN)	1.00	0.25	Gumbel
	$W$	50 (KN)	0.92	0.37	Gumbel

Bảng 2. Trình bày kết quả tính toán  $P_f$  của 3 thuật toán MCS, LPSS và LPSS-EIS. Kết quả được tính toán dựa trên 20 lần chạy độc lập đối với mỗi thuật toán và số mẫu sử dụng cho mỗi thuật toán là 256 mẫu. Giá trị chính xác  $P_f$  được xác định thông qua việc sử dụng thuật toán MCS với 5 triệu mẫu. Kết quả cho thấy các thuật toán đều cho kết quả giá trị trung bình của  $P_f$  bằng với giá trị chính xác. Điều này có nghĩa khi các thuật toán này chạy với mẫu đủ lớn sẽ đảm bảo đạt được giá trị  $P_f$  cuối cùng là chính xác. Tuy nhiên, giá trị COV của  $P_f$  sử dụng LPSS-EIS nhỏ hơn rất nhiều so với MCS và LPSS. Điều này cho phép LPSS-EIS sử dụng số lượng mẫu nhỏ hơn rất nhiều so với 2 thuật toán kia và qua đó giảm thiểu được thời gian tính toán. Để thấy rõ hơn về hiệu quả của các thuật toán thông qua chỉ số COV, Hình 3 biểu diễn giá trị COV thu được khi cỡ mẫu cho thay đổi từ 500 đến 10000. Có thể thấy rằng thuật toán LPSS-EIS có hiệu quả vượt trội so với MCS và LPSS. Cụ thể là khi cỡ mẫu lên đến 10000 thì giá trị COV thu được của thuật toán MCS lên đến 30.7% và của LPSS vẫn là khá lớn với 27% thì của LPSS-EIS chỉ là 1.8%. Điều này cho thấy là các thuật toán tính xác suất thông qua các phương pháp mô phỏng dạng MCS sẽ có nhiều hạn chế về khả năng giảm số lượng mẫu khi giá trị  $P_f$  là khá nhỏ. Do vậy, bằng việc ứng dụng kỹ thuật IS, bài toán xác suất có thể chuyển đổi từ bài toán giá trị  $P_f$  khá nhỏ sang bài toán có giá trị  $P_f$  lớn và hiệu quả trong việc giảm số lượng mẫu cần thiết.

Bảng 2. Kết quả tính xác suất phá hủy của giàn 72 thanh

Phương pháp	Giá trị trung bình	COV
Kết quả chính xác	0.994%	
MCS	0.994%	2.068
LPSS	0.994%	1.716
LPSS-EIS	0.994%	0.061



Hình 3. Biểu đồ quan hệ giữa COV và cỡ mẫu

## 6. KẾT LUẬN

Bài báo trình bày và đánh giá chi tiết hiệu quả của phương pháp tính toán xác suất phá hủy giàn thép sử dụng phân tích trực tiếp LPSS-EIS. LPSS-EIS được xây dựng dựa trên sự kết hợp kỹ thuật mô phỏng được sử dụng là lấy mẫu phân tầng một phần "Latin hóa" ("Latinized" Partially Stratified Sampling) (LPSS) và kỹ thuật lấy mẫu

trọng số nâng cao (EIS). Kết quả áp dụng vào kết cấu giàn không gian 72 thanh cho thấy thuật toán LPSS-EIS có hiệu quả vượt trội so với MCS và LPSS. LPSS-EIS không chỉ đảm bảo xác định chính xác giá trị trung bình của xác suất phá hủy của kết cấu  $P_f$  mà còn giảm giá trị độ lệch chuẩn COV của  $P_f$ , qua đó cho phép giảm số lượng phân tích kết cấu công trình. Hướng nghiên cứu tiếp theo gồm 2 hướng chính là: (1) ứng dụng thuật toán LPSS-EIS cho các bài toán tối ưu có xét đến điều kiện ràng buộc về độ tin cậy và (2) cải tiến thuật toán LPSS-EIS cho bài toán xác định xác suất của công trình chịu tải động đất.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] AISC-LRFD. Manual of steel construction - load and resistance factor design. Chicago (IL): American Institute of Steel Construction, 1999.
- [2] EN 1993-1-1, Eurocode 3. Design of steel structures - part 1-1: general rules and rules for building. Brussels: European Committee for Standardization, 2005.
- [3] V.H. Truong, H.M. Hung, P.H. Anh, T.D. Hoc. Optimization of steel moment frames with panel-zone design using an adaptive differential evolution. Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE)-HUCE 2020; 14(2): 65-75.
- [4] H.A. Pham, V.H. Truong, T.C. Vu. Fuzzy finite element analysis for free vibration response of functionally graded semi-rigid frame structures. Applied Mathematical Modelling 2020; 88: 852-869.
- [5] M.H. Ha, Q.V. Vu, V.H. Truong. Optimization of nonlinear inelastic steel frames considering panel zones. Advances in Engineering Software 2020; 142: 102771.
- [6] V.H. Truong, S.E. Kim. A robust method for optimization of semi-rigid steel frames subject to seismic loading. Journal of Constructional Steel Research 2018; 145: 184-195.
- [7] S.G. Buonopane, B.W. Schafer. Reliability of steel frames designed with advanced analysis. J. Struct. Eng. ASCE 2006; 132(2): 267-276.
- [8] Z. Zhang, C. Jiang, G.G. Wang, X. Han. First and second order approximate reliability analysis methods using evidence theory. Reliability Engineering and System Safety 2015; 137: 40-49.
- [9] H. Zhang, S. Shayan, K.J.R. Rasmussen, B.R. Ellingwood. System-based design of planar steel frames, I: Reliability frame work. J. Constr. Steel Res. 2016; 123: 135-143.
- [10] A. Hadidi, B.F. Azar, A. Rafiee. Efficient response surface method for high-dimensional structural reliability analysis. Structural Safety 2017; 68: 15-27.
- [11] M. Papadrakakis, V. Papadopoulos, N.D. Lagaros. Structural reliability analysis of elastic-plastic structures using neural networks and Monte Carlo simulation. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1996; 136: 145-163.
- [12] B. Asgarian, B. Ordoubadi. Effects of structural uncertainties on seismic performance of steel moment resisting frames. J. Constr. Steel Res. 2016; 120: 132-142.
- [13] X. Huang, J. Chen, H. Zhu. Assessing small failure probabilities by AK-SS: An active learning method combining Kriging and Subset Simulation. Structural Safety 2016; 59: 86-95.
- [14] V. H. Truong, S.E. Kim. An efficient method for reliability-based design optimization of nonlinear inelastic steel space frames. Struct Multidisc Optim 2017; 56: 331-351.
- [15] V.H. Truong, S.E. Kim. Reliability-based design optimization of nonlinear inelastic trusses using improved differential evolution algorithm. Advances in Engineering Software 2018; 121: 59-74.
- [16] S.E. Kim, V.H. Truong. Reliability Evaluation of Semirigid Steel Frames Using Advanced Analysis. Journal of Structural Engineering 146 (5), 04020064.
- [17] M.D. Shields, J. Zhang. The generalization of Latin hypercube sampling. Reliability Engineering and System Safety 2016; 148: 96-108.