Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/jvn.2016.609

PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ TROTTER CHO XẤP XỈ LAPLACE ĐỐI XỨNG

Trịnh Hữu Nghiệm[1] và Lê Trường Giang[2]

[1]*Khoa Cơ bản, Trường Đại học Nam Cần Thơ*

[2]*Khoa Cơ bản, Trường Đại học Tài chính – Marketing*

Thông tin chung:
Ngày nhận: 27/05/2016
Ngày chấp nhận: 22/12/2016

Title:
Laplace approximation with the method of Trotter operator

Từ khóa:
Xấp xỉ Laplace, tổng hình học, tổng ngẫu nhiên, xấp xỉ Poisson, khoảng cách Trotter

Keywords:
Laplace approximation, geometric sums, random sums, Poisson approximation, Trotter distance

ABSTRACT

The main aim of this paper is to study the rates of convergence in distribution of normalized geometric sum to symmetric Laplace distribution by Trotter operator method. The rates of convergence are expressed with two different types of results, namely "large-O" and "small-o" approximation estimates.

TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu tốc độ hội tụ của dãy tổng hình học về phân phối Laplace đối xứng bằng phương pháp toán tử Trotter. Tốc độ hội tụ được trình bày trong bài báo này dưới dạng xấp xỉ "O-lớn" và "o-nhỏ".

Trích dẫn: Trịnh Hữu Nghiệm và Lê Trường Giang, 2016. Phương pháp toán tử Trotter cho xấp xỉ Laplace đối xứng. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 47a: 120-126.

1 GIỚI THIỆU

Cho $(\Omega;F;P)$ là một không gian xác suất, $X:\Omega\to R$ là một biến ngẫu nhiên có hàm phân phối F_X được định nghĩa $F_X(x)=P(\omega\in\Omega: X(\omega)\le x)$, với mọi $x\in R$. Giả sử N là một biến ngẫu nhiên hình học có kỳ vọng $\frac{1}{q}$ và độc lập với các biến ngẫu nhiên $X_j\,(j=1,2,...)$. Khi đó, theo tài liệu của Samuel Kotz(Kotz*et al*, 2001), tổng hình học

$$\sqrt{q}\sum_{j=1}^{N} X_j \qquad (1.1)$$

hội tụ theo phân phối về phân phối Laplace đối xứng, với điều kiện các X_j độc lập cùng phân phối. Phân phối Laplace có nhiều ứng dụng trong khoa học, kỹ thuật và kinh doanh (Kotz*et al*, 2001).

Bài toán xấp xỉ phân phối Laplace đã được nhiều học giả trên thế giới quan tâm như Akira Toda, John Pike...Trong số đó phải kể đến là kết quả của John Pike (Pike *et al.*, 2012). Ông đã sử dụng phương pháp rất nổi tiếng, phương pháp Stein, để giải quyết bài toán này. Cùng thời điểm đó, Akira Toda (Toda, 2012) cũng đưa ra một số kết quả về xấp xỉ phân phối laplace. Tuy nhiên, ông đã sử dụng phương pháp khác, phương pháp sử dụng hàm đặc trưng, để chứng minh các kết quả của mình.

Mục tiêu chính của bài viết này là sử dụng phương pháp toán tử Trotter để đánh giá tốc độ hội tụ của tổng hình học (1.1) về biến ngẫu nhiên có phân phối Laplace dạng đối xứng. Phương pháp toán tử Trotter đã được Trotter xây dựng năm 1959 để chứng minh định lí giới hạn trung tâm (CLT) (không đánh giá tốc độ hội tụ) (Trotter, 1959). Năm 1975, Butzer đã sử dụng phương pháp này đánh giá tốc độ hội tụ trong định lí giới hạn trung tâm. Sau đó, ông đánh giá tốc độ hội tụ cho định lí giới hạn tổng quát, mà phân phối giới hạn là phân phối của biến ngẫu nhiên Z φ-phân tích được, $\varphi(n)\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{d} Z,\ n\to\infty$, ở đó, $\varphi(n)\to 0$ khi $n\to\infty$, và $Z=\varphi(n)\sum_{j=1}^{n} Z_j$, với Z_j là các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân phối (Butzeret *al*, 1978) và áp dụng cho định lí giới hạn trung tâm, luật giới hạn ổn định và luật yếu số lớn (Butzer*et al.*, 1975, Butzer*et al.*, 1978). Gần đây nhất, Trần Lộc Hùng đã sử dụng toán tử Trotter cho biến ngẫu nhiên rời rạc (toán tử, mà Trotter xây dựng năm 1959 cho biến ngẫu nhiên liên tục) và áp dụng thành công cho xấp xỉ Poisson (Hung *et al.*, 2013, Hung *et al.*, 2014).

Các kết quả của bài viết này được trình bày trong Mục 3. Đầu tiên, chúng tôi dùng phương pháp toán tử Trotter chứng minh sự hội tụ theo phân phối của dãy tổng hình học về phân phối Laplace đối xứng, được trình bày trong Định lí 3.1. Sau đó, chúng tôi sử dụng kỹ thuật tương tự như trong bài báo của Butzer (Butzer *et al*, 1975) để đánh giá tốc độ hội tụ dạng *O*-lớn với các điều kiện hàm $f(x)$ thuộc lớp module liên tục hay lớp hàm Lipschitz, được trình bày trong các Định lí 3.2. Cuối cùng là Định lí 3.3, thể hiện tốc độ hội tụ dạng *o*-nhỏ với các điều kiện ràng buộc về moment.

2 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

2.1 Định nghĩa 2.1

Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ xác định trên tập số thực R và $g(x)\neq 0$ với $x\neq x_0$ ($x_0\in R$ hoặc $x_0=\pm\infty$). Khi đó,

$f(x)=O(g(x))$ nếu $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ bị chặn với $x\neq x_0$ và đủ gần x_0.

$f(x)=o(g(x))\ (x\to x_0)$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.

Địnhnghĩa 2.2 Biến ngẫu nhiên N được gọi là có phân phối hình học với tham số $q\,(0<q<1)$, ký hiệu $N\sim$ Geometry (q) nếu N nhận các giá trị $k = 1, 2,..., n$ với xác suất tương ứng

$$P(N=k)=q(1-q)^{k-1}.$$

Kỳ vọng: $E(N)=\sum_{n=1}^{\infty} nP(N=n)=\dfrac{1}{q}$.

Hàm đặc trưng: $\varphi(t)=\dfrac{qe^{it}}{1-(1-q)e^{it}}$.

Hàm sinh: $g(t)=\dfrac{qt}{1-(1-q)t}$.

Định nghĩa 2.3 Biến ngẫu nhiên Z được gọi là có phân phối Laplace đối xứng, ký hiệu $Z\sim L(m,\sigma)$ nếu Z có hàm đặc trưng tương ứng

$$\varphi_Z(t)=\frac{e^{imt}}{1+\frac{\sigma^2t^2}{2}}.$$

Kỳ vọng $E(X)=m$.

Phương sai $D(X)=\sigma^2$.

2.2 Bổ đề 2.1

Giả sử biến ngẫu nhiên $Z\sim L(0,\sigma), F_Z$ là hàm phân phối của Z. Khi đó, ta có

$F_Z(x)=F_{\sqrt{q}\sum_{k=1}^{N} Z_k}(x)$, ở đó $Z_k=Z\sim L(0,\sigma)$

(theo phân phối) và $N\sim$ Geometry(q) $(0<q<1)$.

Chứng minh

Ta có

$$\varphi_{\sqrt{q}\sum_{k=1}^{N} Z_k}(t)=\varphi_{\sum_{k=1}^{N} Z_k}(\sqrt{q}t)$$

$$=\frac{q\varphi z(\sqrt{q}t)}{1-(1-q)\varphi z(\sqrt{q}t)}=\frac{q\dfrac{1}{1+q\frac{\sigma^2t^2}{2}}}{1-(1-q)\dfrac{1}{1+q\frac{\sigma^2t^2}{2}}}$$

$$=\frac{q}{q+q\frac{\sigma^2t^2}{2}}=\frac{1}{1+\frac{\sigma^2t^2}{2}}=\varphi z(t)$$

Ta có điều phải chứng minh.

Dưới đây là định nghĩa và các tính chất của toán tử Trotter đã được xây dựng bởi Trotter (Trotter, 1959).

2.3 Định nghĩa 2.4

Giả sử $f \in C_B(R), C_B(R)$ là lớp các hàm liên tục đều và bị chặn trên tập số thực R, khi đó toán tử liên kết với biến ngẫu nhiên X được định nghĩa

$$T_X f(y)=E[f(X+y)]=\int_R f(x+y)dF_X(x), \forall y \in R.$$

2.4 Tính chất 2.1

Toán tử Trotter có một số tính chất sau

1. $\|T_X f\| \le \|f\|, \forall f \in C_B(R)$,

2. $T_X : C_B(R) \to C_B(R)$,

3. T_X là một toán tử tuyến tính.

4. X_1, X_2 cùng phân phối khi và chỉ khi $T_{X_1} f \equiv T_{X_2} f, \forall f \in C_B(R)$.

5. Nếu X_1, X_2 độc lập thì $T_{X_1+X_2} f \equiv (T_{X_1} \circ T_{X_2}) f \equiv (T_{X_2} \circ T_{X_1}) f, \forall f \in C_B(R)$.

6. $T_{X_1+X_2+...+X_n} f \equiv (T_{X_1} \circ T_{X_2} \circ ... \circ T_{X_n}) f, \forall f \in C_B(R)$,

7. $\left\| T_{\sum_{i=1}^{n} X_i} f - T_{\sum_{i=1}^{n} X_i'} f \right\| \le \sum_{i=1}^{n} \left\| T_{X_i} f - T_{X_i'} f \right\|$, với (X_i) và (X_i'), $i = \overline{1,n}$, độc lập theo mỗi nhóm.

8. $\left\| T_{\sum_{i=1}^{n} X_i} f - T_{\sum_{i=1}^{n} X_i'} f \right\| \le \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \left\| T_{\sum_{i=1}^{n} X_i} f - T_{\sum_{i=1}^{n} X_i'} f \right\|$, với (X_i) và (X_i'), $i = \overline{1,n}$, độc lập theo mỗi nhóm.

9. Nếu

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T_{X_n} f - T_X f \right\| = 0, \forall f \in C_B^2(R), C_B^r(R)$$

$$= \left\{ f \in C_B(R) : f^{(j)} \in C_B(R), 1 \le j \le r, r \in N \right\}$$

thì $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$.

Để đánh giá tốc độ hội tụ trong các định lí giới hạn, chúng ta cần sử dụng một số định nghĩa và tính chất dưới đây (Butzer *et al.*, 1975).

2.5 Module liên tục

Với $f \in C_B(R), \delta \ge 0$, ta có

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|h| \le \delta} \|f(x+h) - f(x)\| \qquad (2.1)$$

1. $\omega(f;\delta)$ là hàm đơn điệu giảm theo δ và $\omega(f;\delta) \to 0$ khi $\delta \to 0^+$.

2. $\omega(f;\lambda\delta) \le (1+\lambda)\omega(f;\delta)$ $(\lambda > 0)$ (2.2)

2.6 Điều kiện Lipschitz

Hàm $f \in C_B(R)$ được gọi là thỏa điều kiện Lipschitz bậc α với $0 < \alpha \le 1$, ký hiệu là $f \in Lip(\alpha)$, nếu $\omega(f;\delta) = O(\delta^\alpha)$.

Đặc biệt, nếu $f' \in C_B(R)$ thì $f \in Lip(1)$.

2.7 Bổ đề 2.2

Nếu biến ngẫu nhiên X có $E(|X|^r) < +\infty$, khi đó $E(|X|^j) < +\infty$ với $1 \le j \le r$ và $E(|X|^j) \le 1 + E(|X|^r)$.

3 TỐC ĐỘ HỘI TỤ CỦA DÃY TỔNG HÌNH HỌC VỀ PHÂN PHỐI LAPLACE

3.1 Định lí 3.1

Cho dãy các biến ngẫu nhiên $(X_k, k = 1, 2, ...)$ độc lập cùng phân phối với X sao cho $E(X) = 0, D(X) = \sigma^2$ và N là biến ngẫu nhiên độc lập và độc lập với X_k, có phân phối hình học với tham số $q (0 < q < 1)$. Khi đó, tổng hình học $\sqrt{q} \sum_{k=1}^{N} X_k$ hội tụ theo phân phối về $Z \sim L(0,\sigma)$ khi $q \to 0$.

3.2 Định lí 3.2

Cho dãy các biến ngẫu nhiên $(X_k, k=1,2,...)$ độc lập cùng phân phối với X. Giả sử, với $3 \le r \in \mathbb{N}$, ta có: $\int_R x^j dF_X(x) = \int_R x^j dF_Z(x), 0 \le j < r, j \in \mathbb{N}$ và $E(|X|^r) < +\infty$.

Khi đó, với mọi $f \in C_B^{r-1}(R)$, ta có:

$$\left\| T_{\sqrt{q} \sum_{k=1}^{N} X_k} f - T_Z f \right\| = O\left(q^{\frac{r-3}{2}} . \omega\left(f^{(r-1)}; q^{\frac{1}{2}} \right) \right).$$

Hơn nữa, nếu $f^{(r-1)} \in Lip\alpha, 0 < \alpha \le 1$, ta có

$$\left\| T_{\sqrt{q} \sum_{k=1}^{N} X_k} f - T_Z f \right\| = O\left(q^{\frac{r+\alpha-3}{2}} \right).$$

3.3 Định lí 3.3

Cho dãy biến ngẫu nhiên $(X_k, k=1,2,...)$ độc lập cùng phân phối với X. Giả sử, với $2 \le r \in \mathbb{N}$, ta có:

$\int_R x^j dF_X(x) = \int_R x^j dF_Z(x), 0 \le j < r, j \in \mathbb{N}$ và $E\left(|X|^r\right) < +\infty$.

Khi đó, $\forall f \in C_B^r(R)$, ta có

$$\left\| T_{\sqrt{q}\sum_{k=1}^{N} X_k} f - T_Z f \right\| = o\left(q^{\frac{r-2}{2}} \right) (q \to 0).$$

4 CHỨNG MINH CÁC ĐỊNH LÍ

4.1 Chứng minh định lí 3.1

Vì $Z \sim L(0,\sigma)$, theo Bổ đề *2.1* ta có

$$F_Z(x) = F_{\sqrt{q}\sum_{k=1}^{N} Z_k}(x),$$

ở đó $Z_k = Z \sim L(0,\sigma)$ (theo phân phối).

Vì $f \in C_B^2(R)$, với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f''(\eta) - f''(y)| \le \varepsilon$ khi $|\eta - y| \le \delta$. Theo khai triển Taylor, ta có

$$f(\sqrt{q}x + y) = f(y) + \sqrt{q}xf'(y) + \frac{(\sqrt{q})^2 x^2}{2} f''(y) + \frac{(\sqrt{q})^2 x^2}{2}[f''(\eta) - f''(y)]$$

ở đó $|\eta - y| \le \sqrt{q}|x|$. Suy ra

$$T_{\sqrt{q}X_k} f(y) = f(y) + \frac{q}{2} f''(y)\sigma^2 + \frac{q}{2}\left[\int_{|x|<\delta\sqrt{q}^{-1}} x^2[f''(\eta) - f''(y)]dF_{X_k}(x) + \int_{|x|\ge\delta\sqrt{q}^{-1}} x^2[f''(\eta) - f''(y)]dF_{X_k}(x) \right].$$

Tương tự, ta có

$$T_{\sqrt{q}Z_k} f(y) = f(y) + \frac{q}{2} f''(y)\sigma^2 + \frac{q}{2}\left[\int_{|x|<\delta\sqrt{q}^{-1}} x^2[f''(\eta) - f''(y)]dF_{Z_k}(x) + \int_{|x|\ge\delta\sqrt{q}^{-1}} x^2[f''(\eta) - f''(y)]dF_{Z_k}(x) \right].$$

Do đó,

$$\left| T_{\sqrt{q}X_k} f(y) - T_{\sqrt{q}Z_k} f(y) \right| \le \frac{q}{2}\left[\int_{|x|<\delta\sqrt{q}^{-1}} x^2 \left| f''(\eta) - f''(y) \right| dF_{X_k}(x) + \int_{|x|<\delta\sqrt{q}^{-1}} x^2 \left| f''(\eta) - f''(y) \right| dF_{Z_k}(x) \right]$$
$$+ q\| f'' \| \left[\int_{|x|\ge\delta\sqrt{q}^{-1}} x^2 dF_{X_k}(x) + \int_{|x|\ge\delta\sqrt{q}^{-1}} x^2 dF_{Z_k}(x) \right]$$
$$\le \frac{q\varepsilon}{2}\left[\int_{|x|<\delta\sqrt{q}^{-1}} x^2 dF_{X_k}(x) + \int_{|x|<\delta\sqrt{q}^{-1}} x^2 dF_{Z_k}(x) \right] + q\| f'' \| \left[\int_{|x|<\delta\sqrt{q}^{-1}} x^2 dF_{X_k}(x) + \int_{|x|<\delta\sqrt{q}^{-1}} x^2 dF_{Z_k}(x) \right]$$
$$\le q\varepsilon\sigma^2 + q\| f'' \| \left[\int_{|x|<\delta\sqrt{q}^{-1}} x^2 dF_{X_k}(x) + \int_{|x|<\delta\sqrt{q}^{-1}} x^2 dF_{Z_k}(x) \right].$$

Suy ra

$$\left\| T_{\sqrt{q}\sum_{k=1}^{n} X_k} f - T_{\sqrt{q}\sum_{k=1}^{n} Z_k} f \right\| \le n q\varepsilon\sigma^2 + \| f'' \| \left[qn \int_{|x|\ge\delta\sqrt{q}^{-1}} x^2 dF_X(x) + qn \int_{|x|\ge\delta\sqrt{q}^{-1}} x^2 dF_Z(x) \right].$$

Do đó,

$$\left\| T_{\sqrt{q}\sum_{k=1}^{N} X_k} f - T_{\sqrt{q}\sum_{k=1}^{N} Z_k} f \right\| \le \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \left\| T_{\sqrt{q}\sum_{k=1}^{n} X_k} f - T_{\sqrt{q}\sum_{k=1}^{n} Z_k} f \right\| \le \varepsilon\left(\sigma^2 + 2\| f'' \| \right),$$

với q đủ nhỏ.

Vậy, $\lim_{q\to 0} \left\| T_{\sqrt{q}\sum_{k=1}^{N} X_k} f - T_Z f \right\| = 0$. Định lí đã được chứng minh.

4.2 Chứng minh định lí 3.2

Vì $Z \sim L(0,\sigma)$, theo Bổ đề *2.1*, ta có

$$F_Z(x) = F_{\sqrt{q}\sum_{k=1}^{N} Z_k}(x),$$

ở đó $Z_k = Z \sim L(0,\sigma)$ (theo phân phối).

Vì $f \in C_B^{r-1}(R)$, với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $| f^{(r-1)}(\eta) - f^{(r-1)}(y) | \le \varepsilon$ khi $| \eta - y | \le \delta$. Khai triển Taylor bậc $r-1$, ta có

$$f\left(\sqrt{q}x+y\right) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\left(\sqrt{q}\right)^j x^j}{j!} . f^{(j)}(y) + \frac{\left(\sqrt{q}\right)^{r-1} x^{r-1}}{(r-1)!}\left[f^{(r-1)}(\eta) - f^{(r-1)}(y)\right],$$

ở đó η nằm giữa y và $y+\sqrt{q}x$. Khi đó, ta có

$$T_{\sqrt{q}X} f(y) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\left(\sqrt{q}\right)^j}{j!} . f^{(j)}(y) . \int_R x^j dF_X(x) + \frac{\left(\sqrt{q}\right)^{r-1}}{(r-1)!} . \int_R x^{r-1}\left[f^{(r-1)}(\eta) - f^{(r-1)}(y)\right] dF_X(x)$$

và

$$T_{\sqrt{q}Z} f(y) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\left(\sqrt{q}\right)^j}{j!} . f^{(j)}(y) . \int_R x^j dF_Z(x) + \frac{\left(\sqrt{q}\right)^{r-1}}{(r-1)!} . \int_R x^{r-1}\left[f^{(r-1)}(\eta) - f^{(r-1)}(y)\right] dF_Z(x).$$

Suy ra

$$\left| T_{\sqrt{q}X} f(y) - T_{\sqrt{q}Z} f(y) \right| \le \frac{\left(\sqrt{q}\right)^{r-1}}{(r-1)!} . \left(|I_1| + |I_2| \right),$$

với

$$|I_1| = \left| \int_R x^{r-1}\left[f^{(r-1)}(\eta) - f^{(r-1)}(y)\right] dF_X(x) \right|$$
$$\le \int_R |x|^{r-1}\left| f^{(r-1)}(\eta) - f^{(r-1)}(y) \right| dF_X(x)$$
$$= \int_R |x|^{r-1}\left| f^{(r-1)}(\eta - y + y) - f^{(r-1)}(y) \right| dF_X(x)$$
$$\le \int_R |x|^{r-1} \omega\left(f^{(r-1)}; |x|\sqrt{q} \right) dF_X(x)$$
$$\le \omega\left(f^{(r-1)}; \sqrt{q} \right) \int_R |x|^{r-1} (1+|x|) dF_X(x)$$
$$\le \omega\left(f^{(r-1)}; \sqrt{q} \right) . \left[1 + 2E\left(|X|^r \right) \right]$$

và

$$|I_2| = \left| \int_R x^{r-1}\left[f^{(r-1)}(\eta) - f^{(r-1)}(y)\right] dF_Z(x) \right| \le \omega\left(f^{(r-1)}; \sqrt{q} \right) . \left[1 + 2E\left(|Z|^r \right) \right].$$

Do đó

$$\left\| T_{\sqrt{q}X} f - T_{\sqrt{q}Z} f \right\| \le \frac{\left(\sqrt{q}\right)^{r-1}}{(r-1)!} \omega\left(f^{(r-1)}; \sqrt{q} \right) . \left[2 + 2E\left(|X|^r \right) + 2E\left(|Z|^r \right) \right].$$

Ta lại có

$$\left\| T_{\sqrt{q} \sum_{k=1}^{N} X_k} f - T_Z f \right\| \le \frac{1}{q} \left\| T_{\sqrt{q}X_1} f - T_{\sqrt{q}Z_1} f \right\| .$$

Vậy

$$\left\| T_{\sqrt{q} \sum_{k=1}^{N} X_k} f - T_Z f \right\| \le \frac{\left(\sqrt{q}\right)^{r-3}}{(r-1)!} \omega\left(f^{(r-1)}; \sqrt{q} \right) . \left[2 + 2E\left(|X|^r \right) + 2E\left(|Z|^r \right) \right]$$

hay

$$\left\| T_{\sqrt{q} \sum_{k=1}^{N} X_k} f - T_Z f \right\| = O\left(q^{\frac{(r-3)}{2}} . \omega\left(f^{(r-1)}; q^{\frac{1}{2}} \right) \right).$$

Nếu $f^{(r-1)} \in Lip\alpha, 0 < \alpha \le 1$, thì

$$\left\| T_{\sqrt{q} \sum_{k=1}^{N} X_k} f - T_Z f \right\| = O\left(q^{\frac{(r-3+\alpha)}{2}} \right).$$

Định lí đã được chứng minh.

4.3 Chứng minh định lí 3.3

Áp dụng khai triển Taylor bậc r cho hàm f tại y, ta có

$$f\left(\sqrt{q}x+y\right) = \sum_{j=0}^{r} \frac{\left(\sqrt{q}\right)^j x^j}{j!} . f^{(j)}(y) + \frac{\left(\sqrt{q}\right)^r x^r}{r!}\left[f^{(r)}(\eta) - f^{(r)}(y)\right],$$

với η nằm giữa y và $y+\sqrt{q}x$. Vì $f \in C_B^r(R)$, với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|\eta - y| < \delta$ suy ra $\left| f^{(r)}(\eta) - f^{(r)}(y) \right| < \varepsilon$.

Ta có

$$T_{\sqrt{q}X}f(y)=\sum_{j=0}^{r}\frac{\left(\sqrt{q}\right)^{j}}{j!}.f^{(j)}(y).\int_R x^j dF_X(x)$$

$$+\frac{\left(\sqrt{q}\right)^{r}}{r!}.\int_R x^r\left[f^{(r)}(\eta)-f^{(r)}(y)\right]dF_X(x)$$

$$=\sum_{j=0}^{r}\frac{\left(\sqrt{q}\right)^{j}}{j!}.f^{(j)}(y).\int_R x^j dF_X(x)+\frac{\left(\sqrt{q}\right)^{r}}{r!}\left(I_1+I_2\right),$$

ở đó

$$I_1=\int_{|x|<\frac{\delta}{\sqrt{q}}} x^r\left[f^{(r)}(\eta)-f^{(r)}(y)\right]dF_X(x),$$

$$I_2=\int_{|x|\geq\frac{\delta}{\sqrt{q}}} x^r\left[f^{(r)}(\eta)-f^{(r)}(y)\right]dF_X(x).$$

Vì $|\eta-y|\leq\sqrt{q}|x|<\delta$, suy ra

$$|I_1|\leq\int_{|x|<\frac{\delta}{\sqrt{q}}}|x|^r\left|f^{(r)}(\eta)-f^{(r)}(y)\right|dF_X(x)$$

$$\leq\epsilon.\int_{|x|<\frac{\delta}{\sqrt{q}}}|x|^r dF_X(x)\leq\epsilon.\beta_r$$

Ta có $\left|f^{(r)}(\eta)-f^{(r)}(y)\right|\leq 2\left\|f^{(r)}\right\|$, suy ra $|I_2|\leq 2\left\|f^{(r)}\right\|.\int_{|x|\geq\frac{\delta}{\sqrt{q}}}|x|^r dF_X(x)\leq\epsilon.2\left\|f^{(r)}\right\|$, với q đủ nhỏ.

Lập luận tương tự, ta có

$$T_{\sqrt{q}Z}f(y)=\sum_{j=0}^{r}\frac{\left(\sqrt{q}\right)^{j}}{j!}.f^{(j)}(y).\int_R x^j dF_Z(x)$$

$$+\frac{\left(\sqrt{q}\right)^{r}}{r!}\left(I_1+I_2\right),$$

ở đó

$$|I_1|=\left|\int_{|x|<\frac{\delta}{\sqrt{q}}} x^r\left[f^{(r)}(\eta)-f^{(r)}(y)\right]dF_Z(x)\right|,$$

$$\leq\epsilon.\beta_r^*\quad\left(\beta_r^*=\int|x|^r dF_Z(x)\right)$$

Suy ra

$$|I_2|=\left|\int_{|x|\geq\frac{\delta}{\sqrt{q}}} x^r\left[f^{(r)}(\eta)-f^{(r)}(y)\right]dF_Z(x)\right|$$

$$\leq\epsilon.2\left\|f^{(r)}\right\|.$$

$$\left\|T_{\sqrt{q}X}f-T_{\sqrt{q}Z}f\right\|\leq\epsilon.\left(\beta_r+\beta_r^*+4\left\|f^{(r)}\right\|\right).\frac{\left(\sqrt{q}\right)^{r}}{r!}.$$

do đó,

$$\left\|T_{\sqrt{q}\sum_{k=1}^{N}X_k}f-T_Zf\right\|\leq\frac{\epsilon}{r!}.\left(\beta_r+\beta_r^*+4\left\|f^{(r)}\right\|\right).q^{\frac{r-2}{2}}.$$

Vậy, $\left\|T_{\sqrt{q}\sum_{k=1}^{N}X_k}f-T_Zf\right\|=o\left(q^{\frac{r-2}{2}}\right)(q\to 0).$

Định lí đã được chứng minh.

5 KẾT LUẬN

Bài báo đã cho thấy tốc độ hội tụ của dãy tổng hình học về phân phối Laplace đối xứng dưới dạng $O-$ lớn, $o-$nhỏ và được chứng minh qua phương pháp toán tử Trotter. Các kết quả đạt được trong bài viết này đã góp phần minh chứng cho tính ưu việt của phương pháp toán tử Trotter về việc đánh giá tốc độ hội tụ trong các định lí giới hạn. Dựa vào khai triển Taylor và các tính chất của toán tử, việc chứng minh các định lí trở nên đơn giản hơn so với các phương pháp khác như: phương pháp hàm đặc trưng, hàm sinh hay Stein. Hơn nữa,phương pháp toán tử Trotter rất hữu hiệu trong không gian vô hạn chiều (Sakalauskas, V., 1977). Cũng vì lẽ đó, hướng nghiên cứu tiếp theo của chúng tôi là xét trong trường hợp vô hạn chiều.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Butzer, P. L., Hahn, L. and Westphal, U., 1975. On the rate of approximation in the central limit theorem, J. Approx. Theory13, 327-340.

Butzer, P.L. and L. Hahn, 1978. General theorems on rates of convergence in distribution of random variables I. General limit theorems, Journal of multivariate analysis 8, pp. 181- 201.

Butzer, P.L., Hahn, L., 1978. General theorems on rates of convergence in distribution of random variables II. Applications to the Stable Limit Laws and Weak Law of Large Numbers, Journal of multivariate analysis 8, pp. 202- 221.

Tran Loc Hung and Vu Thi Thao, 2013. Bounds for the Approximation of Poisson-binomial distribution by Poisson distribution, Journal of Inequalities and Applications, 1029-242X.

Tran Loc Hung and Le Truong Giang, 2014. On bounds in Poisson approximation for integer-valued independent random variables, Journal of Inequalities and Applications, 1029-242X-2014-291.

Kotz, S., Kozubowski, T. J., and Podgo'rski, K., 2001. The Laplace distribution and generalizations: A Revisit with Applications to Communications Economics, Engineering, and Finance, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA.

Pike, J. and Ren, H., 2012. it Stein's method and the Laplace distribution, arXiv:1210.5//5v1.

Sakalauskas, V., 1977. An estimate in the multidimensional limit theorem, Liet. matem. Rink, V. 17(4), pp. 195- 201.

Toda, A. A., 2012. Weak Limit of the Geometric Sum of Independent But Not Identically Distributed Random Variables, arXiv:1111.1786v2.

TrotterH. F., 1959. An elementary proof of the central limit theorem, Arch. Math. Basel 10, 226- 234.