

KHAI THÁC BẤT ĐẲNG THỨC TRONG DẠY HỌC NHẪM RÈN LUYỆN MỘT SỐ THAO TÁC TRÍ TUỆ CHO HỌC SINH TRUNG HỌC CƠ SỞ

NGUYỄN THỊ THANH HÀ*

Ngày nhận bài: 16/06/2016; ngày sửa chữa: 17/06/2016; ngày duyệt đăng: 22/06/2016.

Abstract: Every movement of thinking is a process of solving a problem that arises in the cognitive and practical activities. Thinking process consists of many successive phases, each phase is implemented by a number of intellectual manipulations. Intellectual operations are the bases to develop thinking capacity. Therefore, to develop the mindset for secondary school students in teaching process, the teachers must train the brain to manipulate students and applying inequality in teaching is one of effective ways to develop thinking capacity for students.

Keywords: Inequality, intellectual manipulation, teaching.

Tư duy là sản phẩm của bộ não con người và là một quá trình phản ánh tích cực thế giới khách quan. Kết quả của quá trình tư duy bao giờ cũng là một ý nghĩ và được thể hiện qua ngôn ngữ. Sáng tạo là hoạt động tạo ra bất kì cái gì có tính mới và tính có ích, còn việc tạo ra cái gì mới mà không có ích thì cũng không được gọi là sáng tạo. *Mới và có ích* ở đây có nghĩa so với cái trước đó, cái sau phải có lợi hơn, tiến bộ hơn cái trước [1]. Trong quá trình học Toán, có thể quan niệm là sáng tạo nếu người học tự đương đầu với những vấn đề mới mà họ chưa từng biết. Như vậy, một bài tập cũng được xem như là mang yếu tố sáng tạo, nếu các thao tác giải bài tập không bị những mệnh lệnh nào đó chi phối, tức người giải không có thuật toán để giải và phải tìm kiếm những bước đi không biết trước.

1. Các thao tác trí tuệ (TT) trong quá trình tư duy

1.1. Các thao tác TT:

- *Phân tích, tổng hợp:* *Phân tích* là dùng trí óc chia cái toàn thể ra thành từng phần hoặc từng khía cạnh riêng biệt nằm trong cái toàn thể. Ngược lại, *tổng hợp* là dùng trí óc hợp lại các phần của cái toàn thể. Phân tích và tổng hợp không bao giờ tồn tại tách rời nhau, chúng là hai mặt của một quá trình thống nhất. Trong quá trình phân tích, đã có tổng hợp, phân tích một cái toàn thể đồng thời là tổng hợp các thành phần của nó vì phân tích một cái toàn thể ra thành từng phần cũng chỉ nhằm mục đích làm bộc lộ ra mối liên hệ giữa các thành phần của cái toàn thể ấy, phân tích một cái toàn thể là con đường để nhận thức cái toàn thể đó một cách sâu sắc hơn. Sự thống nhất giữa quá trình phân tích - tổng hợp còn được thể hiện ở chỗ: cái toàn thể ban đầu (tổng hợp I) định hướng cho phân tích, chỉ ra cần phân tích mặt nào, khía cạnh nào, kết quả của phân tích là cái toàn thể ban đầu được nhận thức sâu sắc hơn (tổng hợp II).

Các thao tác phân tích, tổng hợp có mặt trong mọi thao tác TT. Trong mọi khâu của quá trình học tập môn *Toán* của học sinh (HS), năng lực phân tích, tổng hợp luôn là một yếu tố quan trọng giúp HS nắm vững kiến thức và vận dụng chúng một cách sáng tạo. Trong hoạt động giải toán, trước hết phải nhìn nhận một cách tổng hợp để xem bài toán thuộc loại gì, cần huy động kiến thức thuộc vùng nào, có thể sử dụng những phương pháp nào, sau đó phải phân tích cái đã cho, cái phải tìm, hoặc phân tích thành nhiều bài toán nhỏ hơn, phân tích các mối liên hệ giữa các yếu tố của bài toán để tìm lời giải. Sau khi tìm lời giải của các bài toán bộ phận, phải tổng hợp lại để được lời giải của các bài toán đang xét. Thông thường, khi tìm lời giải, ta dùng đến năng lực phân tích nhiều hơn, nhưng khi trình bày lời giải, ta lại dùng đến năng lực tổng hợp để trình bày, giúp lời giải ngắn gọn dù đôi khi có vẻ thiếu tự nhiên. Các kiến thức trong sách giáo khoa thường được trình bày theo lối tổng hợp để đảm bảo tính ngắn gọn, cô đọng, song khi giảng bài, giáo viên (GV) cần có những câu hỏi gợi mở, dẫn dắt để đi đến những kết luận đó sao cho quá trình lí luận càng tự nhiên càng tốt, từ dễ đến khó, không áp đặt, không đột ngột để tạo hứng thú và giúp HS rèn luyện khả năng phân tích.

- *So sánh* là dùng những tính chất chung để xác định sự tương tự hay khác biệt của tập hợp rất nhiều thông tin. Muốn vậy, ta phải phân tích các dấu hiệu thuộc tính của chúng, đối chiếu chúng với nhau rồi tổng hợp lại để đưa ra đặc điểm giống nhau và khác nhau.

- *Tương tự hóa* là một kiểu giống nhau nào đó. Những đối tượng được xem là tương tự nhau khi chúng

* Trường Cao đẳng Sư phạm Hà Tây

phù hợp với nhau trong một quan hệ nào đó. Kết luận suy ra từ tương tự chỉ là một giả thuyết, một dự đoán, có thể đúng, có thể sai nhưng nó góp phần tìm tòi cái mới. Trong hoạt động giải toán, sử dụng suy luận tương tự để liên hệ bài toán cần giải với bài toán đã giải giúp nhanh chóng tìm ra lời giải, do đó khi dạy một tri thức mới, ra một bài tập mới, GV cần gợi ý cho HS biết liên hệ kiến thức cũ, dự đoán kết quả để tìm ra phương án giải quyết.

- *Khái quát hóa, trừu tượng hóa*: *Khái quát hóa* là dùng trí óc tách ra cái chung trong các đối tượng, hiện tượng. Muốn khái quát hóa phải so sánh nhiều đối tượng với nhau để rút ra cái chung, nhưng cũng có thể chỉ từ một đối tượng ta cũng có thể khái quát hóa một tính chất, một phương pháp. Nhờ khái quát hóa, có thể đề xuất được những giả thuyết, những dự đoán. Khái quát hóa một bài toán có thể đưa tới một bài toán rộng hơn (có thể đúng hoặc có thể sai), tổng quát hóa một bài toán có thể giúp ta tìm tòi lời giải thuận lợi hơn, dễ dàng hơn đối với bài toán đã cho. Để rèn luyện cho HS năng lực khái quát hóa đúng đắn, cần rèn luyện cho các em biết phân tích, tổng hợp, so sánh để tìm ra cái chung ẩn náu trong các hiện tượng, sau những chi tiết tản mạn khác nhau, thấy được bản chất của các hiện tượng, sau những hình thức bên ngoài đa dạng, “tóm lược” cái chính, cái cơ bản, cái chung trong cái khác nhau bên ngoài. Muốn vậy, GV phải biết biến thiên những dấu hiệu không bản chất của khái niệm, hiện tượng đang nghiên cứu và giữ không đổi những dấu hiệu bản chất.

Khi thực hiện khái quát hóa ta đã tách cái chung trong các đối tượng và đồng thời loại bỏ những thuộc tính riêng của chúng mà những thuộc tính này làm cho chúng phân biệt với nhau. Đây là quá trình *trừu tượng hóa*. Toán học mang tính trừu tượng cao, vì vậy việc bồi dưỡng cho HS năng lực trừu tượng hóa có ý nghĩa hết sức quan trọng. Để phát triển năng lực trừu tượng hóa cho HS, cần nắm vững mối quan hệ qua lại chặt chẽ giữa tư duy cụ thể và tư duy trừu tượng theo con đường biện chứng để nhận thức chân lí “từ trực quan sinh động đến tư duy trừu tượng, từ trừu tượng đến thực tiễn” trong khi hình thành, củng cố các kiến thức toán học cho HS.

- *Đặc biệt hóa và cụ thể hóa*: Đặc biệt hóa là xét trường hợp cụ thể nằm trong cái chung, tức chuyển từ việc khảo sát một tập hợp đối tượng đã cho sang việc khảo sát một tập hợp đối tượng nhỏ hơn chứa trong tập hợp ban đầu. Đặc biệt hóa dùng để kiểm nghiệm lại kết quả trong những trường hợp riêng hoặc để tìm ra kết quả khác. Cụ thể hóa là tìm một ví dụ minh họa

cho cái chung, tức ta tìm một cái riêng thỏa mãn những thuộc tính của cái chung đã xác định. Trong việc giải toán, việc xét trường hợp đặc biệt có khi gợi ý cho ta tìm được lời giải của bài toán đang xét hoặc thấy được phương pháp giải.

- *Suy luận* là rút ra phán đoán mới từ một hay nhiều phán đoán đã biết theo quy tắc logic xác định.

- *Chứng minh* là hình thức suy luận dựa vào những phán đoán mà tính chính xác đã được công nhận (luận cứ) để khẳng định chính xác của một phán đoán đang cần chứng minh (luận điểm).

1.2. Quá trình tư duy được thực hiện thông qua 4 bước cơ bản sau:

- *Bước 1*: Xác định được vấn đề, biểu đạt nó thành nhiệm vụ tư duy.

- *Bước 2*: Huy động tri thức, vốn kinh nghiệm, liên tưởng, hình thành giả thuyết và cách giải quyết vấn đề, cách trả lời câu hỏi.

- *Bước 3*: Xác minh giả thuyết trong thực tiễn. Nếu giả thuyết đúng thì sang bước tiếp theo, nếu giả thuyết sai thì phủ định nó và hình thành giả thuyết mới.

- *Bước 4*: Quyết định, đánh giá kết quả và đưa ra sử dụng.

2. Khai thác bất đẳng thức trong dạy học nhằm rèn luyện một số thao tác TT cho HS trung học cơ sở

Việc rèn luyện các thao tác TT và phát triển tư duy cho HS trung học cơ sở được thực hiện ở tất cả các môn học trong nhà trường, đặc biệt là bộ môn *Toán*. Chủ đề về *Bất đẳng thức* rất phong phú, đa dạng; quá trình giải các bài toán về bất đẳng thức vận dụng nhiều kiến thức, sử dụng nhiều phương pháp giải, đây cũng loại toán đa dạng và khó. Vì vậy, trong quá trình giải các bài toán về bất đẳng thức, HS sẽ có nhiều cơ hội được rèn luyện các thao tác TT và phát triển tư duy.

Từ những tính chất hiển nhiên đúng và rất đơn giản, ta có thể hướng dẫn HS “sản sinh” ra các công cụ mạnh để chứng minh bất đẳng thức và có thể được sử dụng trong nhiều trường hợp. Quá trình “sản sinh” này tạo cơ hội cho HS rèn luyện các thao tác TT và phát triển tư duy, đặc biệt là tư duy sáng tạo.

Chẳng hạn, từ tính chất hiển nhiên đúng là: “Nếu $x \in \mathbb{R}$ thì $x^2 \geq 0$, dấu bằng xảy ra nếu và chỉ nếu $x=0$ ”. Ta có bài toán sau:

- *Bài toán 1*: Với mỗi số thực $x > 0$, chứng minh rằng $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Để chứng minh điều này, HS sử dụng các thao tác TT 1, 2, 4, 6 để từ tính chất dẫn đến điều

phải chứng minh. Phân tích quá trình tư duy như sau (bảng 1):

Bước 1: Xác định được vấn đề, biểu đạt nó thành nhiệm vụ tư duy	$\frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2+1 \geq 2x$ $\Leftrightarrow x^2+1-2x \geq 0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$	TT1
Bước 2: Huy động tri thức, vốn kinh nghiệm, liên tưởng và cách giải quyết vấn đề, cách trả lời câu hỏi	Bài toán được giải quyết với tri thức: "Nếu $x \in \mathbb{R}$ thì $x^2 \geq 0$, dấu bằng xảy ra nếu và chỉ nếu $x = 0$."	TT2, TT3, TT4
Bước 3: Xác minh cách giải quyết	Cách giải quyết đúng	TT6
Bước 4: Quyết định, đánh giá kết quả và đưa ra sử dụng	Đưa ra lời giải, có thể đưa ra đánh giá kết quả khi x không đơn giản là một con số	TT7

Bảng 1. Quá trình tư duy bài toán 1

Lời giải: Từ tính chất trên, ta có $(x-1)^2 \geq 0$, điều này tương đương với $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x$. Từ điều kiện $x > 0$, ta có thể chia cả hai vế của bất đẳng thức cho x , khi đó được bất đẳng thức phải chứng minh $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Dấu "=" xảy ra nếu và chỉ nếu $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ở bước 4 của quá trình tư duy, HS đánh giá lại kết quả với TT 4 thì lúc này ta có thể có rất nhiều bài toán. Trong đó, có bài toán đơn giản sau:

- Bài toán 2: Với $a, b \in \mathbb{R}^+$, chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Với TT1, TT2, TT3, TT6, HS có thể dễ dàng giải quyết bài toán với phân tích quá trình tư duy như sau (bảng 2):

Bảng 2. Quá trình tư duy bài toán 2

Bước 1: Xác định được vấn đề, biểu đạt nó thành nhiệm vụ tư duy	$\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab$ $\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0$ $\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$	TT1
Bước 2: Huy động tri thức, vốn kinh nghiệm, liên tưởng và cách giải quyết vấn đề, cách trả lời câu hỏi	Bài toán được giải quyết với tri thức: "Nếu $x \in \mathbb{R}$ thì $x^2 \geq 0$, dấu bằng xảy ra nếu và chỉ nếu $x = 0$."	TT2, TT3, TT5
Bước 3: Xác minh cách giải quyết	Cách giải quyết đúng	TT6
Bước 4: Quyết định, đánh giá kết quả và đưa ra sử dụng	Đưa ra lời giải	TT7

Lời giải: Ta luôn có $(a-b)^2 \geq 0$, điều này tương đương với

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Đó là điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra nếu và chỉ nếu $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$.

Bài toán 2 tuy đơn giản nhưng lại là cơ sở để giải quyết và nghiên cứu các bài toán phức tạp hơn. Xuất phát từ việc khai thác bất đẳng thức đơn giản trên, ta phát triển dần lên thành các bất đẳng thức đòi hỏi nhiều đến kiến thức sâu hơn. Chẳng hạn: Bài toán 3 (Bất đẳng thức Nesbitt): Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích quá trình tư duy như sau (bảng 3):

Bảng 3. Quá trình tư duy bài toán 3

Bước 1: Xác định được vấn đề, biểu đạt nó thành nhiệm vụ tư duy	$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq 3$	TT1
Bước 2: Huy động tri thức, vốn kinh nghiệm, liên tưởng và cách giải quyết vấn đề, cách trả lời câu hỏi	$\left(\frac{2a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{2b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{2c}{b+a} + 1\right) \geq 6$ $\frac{2a+b+c}{b+c} + \frac{2b+a+c}{a+c} + \frac{2c+b+a}{b+a} \geq 6$ Nhận xét: có các nghịch đảo nên áp dụng $x + \frac{1}{x} \geq 2; \forall x > 0$. Ta thu được điều phải chứng minh	TT1, TT2, TT3, TT4
Bước 3: Xác minh cách giải quyết	Cách giải quyết đúng	TT6
Bước 4: Quyết định, đánh giá kết quả và đưa ra sử dụng	Đưa ra lời giải	TT7

Lời giải: Theo bất đẳng thức ở bài toán 2, ta có

$$\frac{a+c}{c+b} + \frac{b+c}{c+a} \geq 2$$

Tương tự có: $\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{b+a} \geq 2$ và $\frac{a+b}{a+c} + \frac{a+c}{b+a} \geq 2$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức ta được:

$$\left(\frac{a+c}{c+b} + \frac{a+b}{b+c}\right) + \left(\frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{c+a}\right) + \left(\frac{b+c}{b+a} + \frac{a+c}{b+a}\right) \geq 2+2+2=6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{2b}{a+c} + 1\right) + \left(\frac{2c}{b+a} + 1\right) \geq 6$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a}\right) \geq 3$$

(Xem tiếp trang 165)

tự hào dân tộc, ý thức được vai trò và trách nhiệm của cá nhân với tập thể, xã hội, đất nước thông qua những hành động cụ thể; hình thành ý thức tự giác, tích cực, chủ động trong học tập; khuyến khích hoạt động tự học, tự nghiên cứu và sáng tạo để nâng cao động cơ, hứng thú và thái độ học tập mới trong học tập bộ môn *Lịch sử* nói riêng, các môn học nói chung. Từ đó, HS tích cực tham gia vào các hoạt động chung của tập thể, hoạt động giáo dục ngoài giờ lên lớp. Qua đó tích hợp các kiến thức được học để giải quyết các tình huống thực tiễn (kiến thức môn *Lịch sử, Địa lí, Sinh học, Giáo dục Quốc phòng - An ninh* và hoạt động giáo dục ngoài giờ lên lớp). Giáo dục thái độ biết quan tâm tới cộng đồng, tới những vấn đề quan trọng của đời sống nhân dân, đời sống học đường, giúp các em nhận thức rõ hơn về vai trò và trách nhiệm của mình đối với cuộc sống hiện tại và tương lai. Dự án góp phần xây dựng những quan điểm sống, nề nếp đạo đức tốt đẹp: một mặt giữ gìn bản sắc dân tộc một mặt phát huy những yếu tố mới, hiện đại, phù hợp với xu thế phát triển mới.

- Với GV: vận dụng “DH dự án” là một hình thức tổ chức DH, trong đó HS thực hiện một nhiệm vụ học tập phức hợp, gắn với thực tiễn, kết hợp lí thuyết với thực hành, tự lập kế hoạch, thực hiện và đánh giá kết quả, tăng cường khả năng sáng tạo của các em. DH TNST vừa là hình thức DH có khả năng đem lại kết quả tối ưu, giúp kết hợp lí thuyết với thực hành, bồi dưỡng kiến thức, kĩ năng, tình cảm, thái độ và thông qua đó hình thành kĩ năng sống cho HS, là điều kiện để định hướng

nghề nghiệp, bồi đắp ước mơ, lí tưởng cho các em.

DH TNST là một trong những biện pháp để đổi mới, cải tiến PPDH nhằm nâng cao chất lượng DH bộ môn nói riêng, chất lượng GD-ĐT nói chung trong thời kì mới. Hình thức DH này góp phần khắc phục tình trạng truyền đạt kiến thức thụ động, một chiều; tích cực hóa HĐ DH, thực hiện mục tiêu “lấy người học làm trung tâm”; củng cố nội dung kiến thức và kĩ năng của các bộ môn *Lịch sử, Địa lí, Giáo dục công dân, Quốc phòng - An ninh* và một số bộ môn khác mà HS đã được học nhằm nâng cao chất lượng DH ở trường trung học phổ thông. Tuy nhiên trong quá trình tổ chức thực hiện, GV cần căn cứ vào đặc điểm, tình hình cụ thể từng trường, từng địa phương, đối tượng HS, để xây dựng kế hoạch, tổ chức HĐ TNST không bị gò ép, tránh hình thức và đạt hiệu quả cao nhất. □

Tài liệu tham khảo

- [1] Viện Việt Nam học (2013). *Kỉ yếu hội thảo kỉ niệm 722 năm chiến thắng Bạch Đằng*.
- [2] Phan Ngọc Liên (chủ biên) (2010). *Phương pháp dạy học lịch sử*. NXB Đại học Sư phạm.
- [3] Nguyễn Thị Côi (2011). *Các con đường, biện pháp nâng cao hiệu quả dạy học lịch sử ở trường phổ thông*. NXB Đại học Sư phạm.
- [4] Phan Ngọc Liên (tổng chủ biên) (2007). *Lịch sử 10*. NXB Giáo dục.
- [5] Bộ GD-ĐT (2015). “*Tài liệu tập huấn kĩ năng xây dựng và tổ chức các hoạt động trải nghiệm sáng tạo trong trường trung học*”.

Đổi mới và phương thức dạy nghề...

(Tiếp theo trang 171)

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{a+c}{c+b} = \frac{a+b}{b+c}; \frac{a+b}{a+c} = \frac{b+c}{c+a}; \frac{b+c}{b+a} = \frac{a+c}{b+a} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Quy trình tư duy trong dạy học toán và cụ thể là dạy học bất đẳng thức luôn song hành cùng với các thao tác trí tuệ cơ bản. Việc khai thác hệ thống bài tập bất đẳng thức sẽ giúp HS trung học cơ sở rèn luyện các thao tác trí tuệ cơ bản. Từ đó, bồi dưỡng phát triển tư duy của HS trong quá trình dạy học Toán. □

Tài liệu tham khảo

- [1] Tôn Thân (1995). *Xây dựng hệ thống câu hỏi và bài tập nhằm bồi dưỡng một số yếu tố của tư duy sáng tạo cho học sinh khá và giỏi ở trường trung học cơ sở Việt Nam*. Luận án tiến sĩ. Viện Khoa học Giáo dục.
- [2] Nguyễn Thái Hoà (2001). *Rèn luyện tư duy qua việc giải bài tập toán*. NXB Giáo dục.
- [3] Trần Luận (1995). *Phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh thông qua hệ thống bài tập toán*. Tạp chí Nghiên cứu giáo dục, số 8/1995.
- [4] G. Polya (2006). *Sáng tạo Toán học*. NXB Giáo dục.
- [5] Nguyễn Duy Thuận (2007). *Phát triển tư duy Toán học trong học sinh*. NXB Đại học Sư phạm.
- [6] Zdravko Cvetkovski (2012). *Inequalities Theorems, Techniques and Selected Problems*. Springer, Berlin.