

# BỒI DƯỠNG KĨ NĂNG SIÊU NHẬN THỨC CHO HỌC SINH THÔNG QUA GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC KHÔNG GIAN Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

HOÀNG XUÂN BÌNH\* - PHÍ VĂN THỦY\*\*

Ngày nhận bài: 29/03/2016; ngày sửa chữa: 04/04/2016; ngày duyệt đăng: 07/04/2016.

**Abstract:** Metacognition refers to the processes used to plan, monitor, and assess one's understanding and performance. Metacognition includes a critical awareness of one's thinking and learning and oneself as a thinker and learner. Fostering metacognitive skills helps students know their learning competence themselves, encouraging their learning interest and improving quality of learning.

**Keywords:** metacognitive skills, solid geometry problems.

“Siêu nhận thức” (SNT) được hiểu là “tư duy về tư duy”, hoặc “nhận thức về nhận thức”, có nghĩa là khả năng kiểm soát quá trình suy nghĩ của cá nhân, nhận thức về việc lựa chọn và sử dụng các chiến lược, là tự phân tích quá trình suy nghĩ của một người nào đó khi giải quyết vấn đề (GQVĐ).

Trong dạy học Toán, việc bồi dưỡng kĩ năng SNT cho học sinh (HS) phổ thông giúp các em hiểu được suy nghĩ của bản thân và ý nghĩa của bài toán (BT), say mê, hứng thú học tập; từ đó nâng cao hiệu quả dạy học. Quá trình khai thác và giải BT với hướng giải quyết lặp đi lặp lại các câu hỏi: “tại sao?”, “như thế nào?”, “bằng cách nào?”, “mình phải bắt đầu từ đâu?”, “mình có thể làm gì?”, “làm như vậy có lợi gì?”,... để HS có thể tìm ra nhiều cách giải quyết khác nhau, nâng cao khả năng tư duy toán học, năng lực phát hiện và GQVĐ. Việc bồi dưỡng kĩ năng SNT cho HS là xu hướng dạy học mới đang được các nước trên thế giới chú trọng. Ở nước ta, vấn đề bồi dưỡng kĩ năng SNT cho HS chưa được quan tâm đúng mức, tương minh.

Bài viết tập trung nghiên cứu việc bồi dưỡng kĩ năng SNT cho HS trung học phổ thông trong dạy học môn Toán thông qua giải BT, bài tập hình học không gian.

## 1. Bồi dưỡng kĩ năng lập kế hoạch

Trước khi đưa ra được kế hoạch cụ thể, HS cần tìm hiểu thông tin, sự kiện liên quan đến vấn đề, những khó khăn, bất lợi, điều kiện thuận lợi và nguyên nhân phải lập kế hoạch trước khi GQVĐ; sau đó, đưa ra ý tưởng về giải pháp, mô hình, hành động để GQVĐ; cuối cùng, kiểm tra lại các ý tưởng phù hợp hay chưa, sắp xếp các ý tưởng đó theo thứ tự thời gian, tính chất

quan trọng hoặc theo tư duy logic để hình thành kế hoạch hành động.

Để đạt được các mục tiêu học tập môn Toán, HS cần lập kế hoạch trước. Kế hoạch gồm: mục tiêu học tập, xây dựng chiến lược tổng thể để đạt được mục tiêu đặt ra và triển khai có hệ thống kế hoạch đặt ra. Do vậy, HS phải nắm được mình sẽ làm gì (như: biết phát huy thế mạnh, thuận lợi và khắc phục, vượt qua khó khăn, hạn chế,...), lập thời gian biểu, kế hoạch cụ thể trong học tập. Từ đó, HS sẽ vượt qua khó khăn, thử thách, hạn chế tình trạng bị động, thiếu sự chuẩn bị trước, dẫn đến bi quan, chán nản trong học tập. Với mỗi BT, việc lập kế hoạch trước khi giải sẽ giúp HS tìm ra hướng giải. Song để lập được kế hoạch giải, HS phải tự đặt ra và trả lời được hàng loạt các câu hỏi như: BT đã cho thuộc dạng toán nào? Tương tự BT nào đã biết? Phương pháp giải bài này là gì? Tại sao lại áp dụng phương pháp này mà không áp dụng phương pháp kia? BT có yếu tố gì đặc biệt? Khai thác và sử dụng giả thiết của BT như thế nào? Liên tưởng, huy động kiến thức liên quan nào? Giả thiết và kết luận của BT có mối liên hệ gì với nhau?... Từ đó, lựa chọn hướng và lập kế hoạch giải BT. Chẳng hạn:

**Ví dụ 1.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$ , có  $AB=1, CC'=m$  ( $m > 0$ ). Tìm  $m$  biết rằng, góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$  bằng  $60^\circ$ .

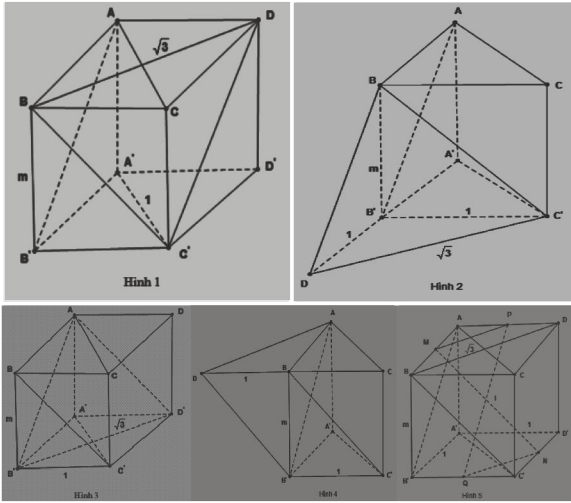
Trước một BT, HS phải huy động kiến thức cần thiết để giải. HS gặp khó khăn nhất là làm cách nào để xác định được góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$ .

- Cách 1: Dựa vào phương pháp xác định góc

\* Trường Đại học Nội vụ Hà Nội

\*\* Trường THPT Lê Hồng Phong, TP. Biên Hòa, Đồng Nai

giữa hai đường thẳng, HS có thể định hướng (lên kế hoạch), tìm tòi một số cách dựng và xác định góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$  như sau (hình 1, hình 2, hình 3, hình 4 và hình 5):



Trước tiên, dựng điểm  $D$  và điểm  $D'$  lần lượt sao cho tứ giác  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$  là các hình thoi (xem hình 1).

Suy ra  $AB' // DC' \Rightarrow (\widehat{AB', BC'}) = (\widehat{DC', BC'}) = \widehat{BC'D} = 60^\circ$ .

Dựng điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABDB'$  là hình bình hành, suy ra  $AB' // BD$  và  $(\widehat{AB', BC'}) = (\widehat{BD, BC'}) = \widehat{BC'D} = 60^\circ$  (xem hình 2).

Dựng điểm  $D$  và  $D'$  lần lượt sao cho tứ giác  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$  là các hình thoi (xem hình 3). Suy ra  $AD' // BC'$  và  $(\widehat{AB', BC'}) = (\widehat{AB', AD'}) = \widehat{B'AD'} = 60^\circ$  (xem hình 3).

Dựng điểm  $D$  sao cho tứ giác  $BC'B'D$  là hình bình hành (xem hình 4). Suy ra  $BC' // DB'$

$$\text{và } (\widehat{AB', BC'}) = (\widehat{AB', DB'}) = \widehat{AB'D} = 60^\circ$$

Dựng  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, C'D', AD, B'C'$  (xem hình 5).

Khi đó:  $AB' // PQ$  và  $BC' // MN$  nên:

$$(\widehat{AB', BC'}) = (\widehat{PQ, MN}) = \widehat{MIP} = 60^\circ.$$

- Cách 2: Dựa vào phương pháp tọa độ trong không gian để giải BT (xem hình 6)

$$\text{Ta có: } A(0; 0; m), B(1; 0; 0), C\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right),$$

$$\overrightarrow{AB'} = (1; 0; -m), \overrightarrow{BC'} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -m\right) \text{ và } \cos(\widehat{AB', BC'}) = \frac{|\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}|}{|\overrightarrow{AB'}| \cdot |\overrightarrow{BC'}|}.$$

Sau khi HS huy động kiến thức và đưa ra một số cách giải như trên, các em sẽ lựa chọn và sử dụng một cách nào đó và lập kế hoạch giải BT.

Với hình 1, áp dụng định lý Pitago và định lý cosin, ta được:  $BD = BC' = \sqrt{m^2 + 1}$  và  $BD = \sqrt{3}$ . Vì  $\triangle BC'D$  cân tại  $C'$  và  $\widehat{BC'D} = 60^\circ$  nên  $\triangle BC'D$  đều.

Do đó:  $m^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$ . Vậy, giá trị  $m$  cần tìm là:

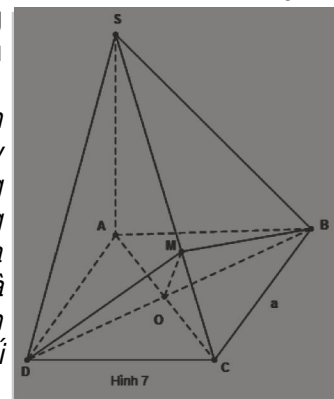
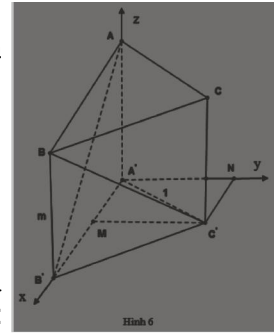
$$m = \sqrt{2}.$$

## 2. Bồi dưỡng kĩ năng giám sát và điều chỉnh

SNT đề cập đến nhận thức, khả năng kiểm soát và điều chỉnh quá trình tư duy của con người. Các khía cạnh chính của SNT giúp con người GQVĐ tốt hơn, giám sát và điều chỉnh quá trình suy nghĩ và quan điểm đánh giá của mình. Vì vậy, quá trình GQVĐ cần diễn ra tự nhiên, giúp HS tiếp cận một cách hợp lý. Để quá trình GQVĐ diễn ra tự nhiên, HS cần viết ra suy nghĩ của mình và chiến lược giải toán. HS cần cải thiện khả năng SNT nhằm phát triển khả năng GQVĐ.

Trong quá trình thực hiện mục tiêu học tập, HS cần: - Theo dõi, giám sát và điều chỉnh nhiệm vụ đang thực hiện xem có đúng với tiến độ đề ra hay không, có điều chỉnh, bổ sung vấn đề gì không? (như: tăng giảm thời gian cho phù hợp với từng giai đoạn), kết quả đạt được là gì? - Phát hiện và sửa chữa sai lầm (giám sát và điều chỉnh), khó khăn gì gặp phải?; nếu có khó khăn vướng mắc thì phải làm thế nào?; khi giải quyết một BT, HS cần chú ý đến điều gì?. Chẳng hạn: "Hãy củng cố những thành công bước đầu của bạn. Thực hiện một cách chi tiết những phép tính đại số hay hình học mà bạn đã sơ bộ làm trước đây. Kiểm tra lại mỗi bước giải những suy luận logic hay bằng trực giác, hay nếu có thể được bằng cả hai cách"[1; tr 52]. Khi thực hiện, HS cần chú ý đến tính sáng tạo, tính hợp lý và có sự thay đổi sao cho phù hợp với thực tế GQVĐ, nỗ lực lựa chọn thay thế cái mới độc đáo hơn, sáng tạo hơn (điều chỉnh công việc) và phối hợp nhiều giải pháp để GQVĐ.

**Ví dụ 2:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA$  vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(SDC)$  bằng  $60^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $S.ABCD$ .



**Hướng dẫn:** Gọi  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $B$  lên cạnh  $SC$ , khi đó  $HS$  dễ dàng chứng minh được  $DM$  vuông góc với cạnh  $SC$ . Do đó, góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(SDC)$  là  $\widehat{BMD}$ . Theo giả thiết:  $\widehat{BMD} = 60^\circ$ ,  $\triangle MBD$  là tam giác cân tại  $M$  nên

$$MO \perp BD \text{ và } \widehat{OMD} = \frac{1}{2} \widehat{BMD} = 30^\circ.$$

Xét  $\triangle MOD$  vuông tại  $O$ , khi đó:

$$MD = \frac{OD}{\sin \widehat{OMD}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sin 30^\circ} = a\sqrt{2}.$$

Do  $CD \perp SA$  và  $CD \perp AD$ , nên  $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$ .

Vì  $\triangle SCD$  vuông tại  $D$ , nên:

$$\frac{1}{DM^2} = \frac{1}{DS^2} + \frac{1}{DC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{DS^2} = \frac{1}{DM^2} - \frac{1}{DC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{DS^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} - \frac{1}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{DS^2} = -\frac{1}{2a^2} \text{ (vô lí)}.$$

Đến đây, HS suy nghĩ ngay đến việc tính toán sai ở bước nào đó, giải sai hoặc đề bài sai. Sau khi kiểm tra lại tất cả các bước biến đổi tính toán, HS không phát hiện ra chỗ sai. Vậy, tại sao lại có sự vô lí này? Vấn đề đặt ra là HS phải tìm nguyên nhân dẫn đến sự vô lí này. Dưới đây, HS tự phát hiện ra góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(SDC)$  bằng  $120^\circ$ .

Vì  $\triangle MBD$  là tam giác cân tại  $M$  nên  $MO \perp BD$  và  $\widehat{OMD} = \frac{1}{2} \widehat{BMD} = 60^\circ$ .

$$\triangle MOD \text{ vuông tại } O, \text{ có } MD = \frac{OD}{\sin \widehat{OMD}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Do  $CD \perp SA$  và  $CD \perp AD$ , nên  $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$ .

$\triangle SCD$  vuông tại  $D$ , có:

$$\frac{1}{DM^2} = \frac{1}{DS^2} + \frac{1}{DC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{DS^2} = \frac{1}{DM^2} - \frac{1}{DC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{DS^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} - \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow DS = a\sqrt{2}.$$

$\triangle SAD$  vuông tại  $A$ , ta có:

$$SA = \sqrt{DS^2 - AD^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - a^2} = a.$$

$$\text{Kết luận: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{3} a^3 \text{ (đvdt)}.$$

Như vậy, nếu HS nỗ lực tư duy thì không những GQVĐ hiệu quả mà còn góp phần rút kinh nghiệm lập kế hoạch cho lần sau khả thi hơn. Do đó, việc bồi dưỡng kĩ năng SNT cho HS là rất cần thiết, giúp các em phát triển khả năng phát hiện và sửa chữa sai lầm, giám sát, điều chỉnh trong quá trình GQVĐ.

### 3. Bồi dưỡng kĩ năng tự đánh giá (TĐG)

TĐG là một khâu cần thiết của HS trong quá trình học tập môn *Toán* nói chung và giải một BT nói riêng, giúp các em nhìn nhận lại những gì đã đạt và chưa đạt được, nguyên nhân dẫn đến kết quả đó (chẳng hạn: kiến thức đã nắm vững chưa, bị "hổng" kiến thức nào, nguyên nhân tại sao?). Từ đó, HS tự lên kế hoạch điều chỉnh và bổ sung kịp thời. Trong quá trình giải toán, TĐG sẽ giúp HS nhìn nhận lại các bước giải và xem lại BT sau khi giải (xem mình giải đúng chưa, chặt chẽ chưa? tại sao lại giải được như vậy và đã áp dụng phương pháp nào, huy động những kiến thức nào, còn cách giải nào khác hay và ngắn gọn hơn không? BT này tương tự với BT nào, có thể mở rộng thành BT nào, có liên hệ với thực tế được không?). Nếu chưa giải được BT, TĐG sẽ giúp HS tìm được nguyên nhân tại sao không giải được BT này. "*Cố gắng hoàn thiện những phần nhỏ và phần lớn trong cách giải, cuối cùng tìm cách hoàn thiện toàn bộ cách giải, làm cho cách giải sáng sủa một cách trực giác. Hãy sắp xếp nó một cách tự nhiên trong hệ thống những kiến thức có trước của bạn. Hãy xét kĩ lưỡng phương pháp mà bạn đã theo, cố cho được cái phần chủ yếu của nó và đem áp dụng cho những BT khác*" [1; tr 52]. Khi tự phát hiện và sửa chữa sai lầm, HS sẽ củng cố được kiến thức, từ đó có khả năng thẩm định, đánh giá những gì đã làm. "*Làm như vậy được lợi gì? Bạn có thể tìm thấy một cách giải khác tốt hơn, phát hiện ra những sự kiện mới và bổ ích. Trong mọi trường hợp, nếu có thói quen xem lại kĩ càng các cách giải, bạn sẽ thu được kiến thức rất có hệ thống và sẵn sàng đem ứng dụng và bạn sẽ phát triển được khả năng giải toán của mình*" [1; tr 53]. Vì vậy, việc bồi dưỡng năng lực phát hiện và sửa chữa sai lầm và năng lực TĐG là một biện pháp rất quan trọng để nâng cao năng lực phát hiện và GQVĐ cho HS.

Chẳng hạn: trong ví dụ 1, nếu HS chỉ xét trường hợp góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$  bằng  $60^\circ$  thì BT chưa giải quyết một cách triệt để vì còn trường hợp góc giữa hai đường thẳng này bằng  $120^\circ$ .

Khi đó xét  $\triangle BC'D$  cân tại  $B$ , ta có:

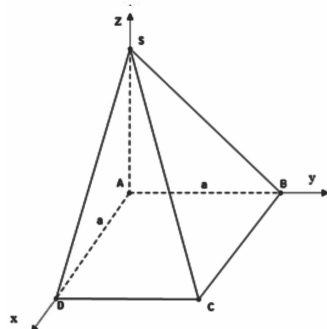
$$C'D^2 = BD^2 + C'B^2 - 2BD \cdot C'B \cdot \cos \widehat{CBD} \Leftrightarrow C'D^2 = m^2 + 1 + m^2 + 1 - 2m^2$$

$$= m^2 + 1 + m^2 + 1 - 2\sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{m^2 + 1} \cdot \cos 120^\circ \Leftrightarrow C'D^2 = 3m^2 + 3$$

Mặt khác  $C'D = \sqrt{3}$ , suy ra:  $3m^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow m = 0$  (loại).

Đến đây, HS kết luận  $m = \sqrt{2}$ .

Trong ví dụ 2, GV yêu cầu HS đánh giá lại quá trình giải quyết BT. GV cần dẫn dắt HS tìm thêm cách giải sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian. Vì đáy là hình vuông cạnh  $a$  và  $SA$  vuông góc với mặt đáy nên ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz để giải.



Hình 8

Đặt  $SA = m (m > 0)$ , ta được:  $S(0; 0; m)$ ;  $B(0; a; 0)$ ;  $C(a; a; 0)$ ;  $D(a; 0; 0)$  và  $\overline{SB} = (0; a; -m)$ ,  $\overline{SC} = (a; a; -m)$ ,  $\overline{SD} = (a; 0; -m)$ ;  $\vec{n}_1 = \vec{n}_{(SBC)} = [\overline{SB}; \overline{SC}] = (0; -ma; -a^2)$ .  
 $\vec{n}_2 = \vec{n}_{(SDC)} = [\overline{SD}; \overline{SC}] = (am; 0; a^2)$ .

Theo giả thiết:

$$\cos(\widehat{n_1, n_2}) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|m^4|}{\sqrt{m^2 a^2 + m^4} \cdot \sqrt{m^2 a^2 + m^4}} \Leftrightarrow m = a.$$

Từ đó, HS tính được  $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} a^3$  (đvdt).

Sau đó, GV yêu cầu HS so sánh ưu và nhược điểm của hai cách giải trên.

TĐG sẽ giúp HS biết nhìn nhận lại quá trình giải một BT, hệ thống hóa kiến thức, phát hiện ra phần kiến thức mình bị "hổng" rồi tự lên kế hoạch củng cố kịp thời, HS thu được kiến thức có hệ thống và mang ứng dụng vào các tình huống mới. Ngoài ra, còn giúp HS biết so sánh và rút ra được kinh nghiệm học tập, điều chỉnh kế hoạch, chiến lược và quá trình thực hiện nhiệm vụ. Khi giải quyết một vấn đề, tất cả các giai đoạn được trộn lẫn và tiến hành song song, các phát hiện mới có xu hướng thay đổi kế hoạch tổng thể, hoặc phần kết thúc của giai đoạn này sẽ là phần mở đầu cho giai đoạn khác.

\*\*\*

SNT được mô tả là nhận thức của con người để hiểu, kiểm soát và thao tác quá trình nhận thức của bản thân. Có thể nói chiến lược SNT luôn có khả năng nhận thức và kiểm soát. Để học tập toán có hiệu quả, HS nên không chỉ hiểu những chiến lược có sẵn và các mục đích của chiến lược mà còn có khả năng lựa chọn đầy đủ, sử dụng, giám sát, điều chỉnh và đánh giá việc sử dụng các chiến lược. HS có kĩ năng SNT tốt có thể giám sát và chỉ đạo quá trình học tập của mình. Để cải thiện được khả năng

phát hiện và GQVĐ trong học tập Toán, HS cần cải thiện khả năng SNT. □

**Tài liệu tham khảo**

[1] G. Polya (1997). *Giải một bài toán như thế nào?* NXB Giáo dục.  
 [2] Nguyễn Bá Kim (2004). *Phương pháp dạy học môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm.  
 [3] Hồ Thị Hương (2013). *Nghiên cứu lí thuyết siêu nhận thức và đề xuất khả năng ứng dụng trong giáo dục trung học*. Đề tài cấp Viện, Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam.  
 [4] Brown A (1987). *Metacognition, executive control, self-regulation and other more mysterious mechanisms*, in F. E Weinert.  
 [5] Emily L.Lai (2011). *Metacognition: A literature review*. Reseach report, Peason.

**Áp dụng kĩ thuật dạy học...**

(Tiếp theo trang bìa 3)

KTDH tích cực đã được đề cập và nghiên cứu gần đây, tuy nhiên việc ứng dụng cho dạy các môn học, đặc biệt các môn học thuộc khối kĩ thuật vẫn còn hạn chế. Bài viết là một đề xuất cho việc ứng dụng các KTDH kĩ thuật cho các môn học, đặc biệt các môn học thuộc khối ngành kĩ thuật. Kết quả thực nghiệm đối với môn học Kĩ thuật điện tại Trường Đại học Công nghiệp TP. Hồ Chí Minh là một minh chứng hiệu quả cho việc ứng dụng các kĩ thuật này, đồng thời cũng góp phần nâng cao hiệu quả của quan điểm lấy người học làm trung tâm hiện nay. □

**Tài liệu tham khảo**

[1] Bernd Meier - Nguyễn Văn Cường (2009). *Lí luận dạy học hiện đại*. NXB Đại học Sư phạm.  
 [2] Jana Hackathorn - Erin D. Solomon - Kate L. Blankmeyer - Rachel E. Tennial - Amy M. Garczynski (2011). “*Learning by Doing: An Empirical Study of Active Teaching Techniques*”, The Journal of Effective Teaching”, Vol. 11, no. 2, pp. 40-54.  
 [3] Clóvis Luís Konopka - Martha Bohrer Adaime, Pedro Henrique Mosele (2015). “*Active Teaching and Learning Methodologies: Some Considerations*”. Creative Education, Vol. 6, pp. 1536-1545.  
 [4] Ngô Ngọc Thọ (2008). *Kĩ thuật điện*. Trường Đại học Công nghiệp TP. Hồ Chí Minh.  
 [5] Lý Minh Tiên (2008). *Tài liệu giảng dạy môn Xác suất thống kê ứng dụng trong giáo dục*. Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh.