MỘT SỐ HOẠT ĐỘNG CƠ BẢN GIÚP HỌC SINH PHỔ THÔNG KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT TOÁN HỌC

TRƯƠNG THỊ DUNG*

Ngày nhận bài: 29/03/2016; ngày sửa chữa: 06/04/2016; ngày duyệt đăng: 07/04/2016.

Abstract: *Hypothesis test is an important activity in the process of exploring knowledge through observing a process modeled via a set of random variables. In the paper, author proposes eight methods to help students to test mathematical hypothesis in learning towards discovery knowledge. These methods include solving problems in different ways; examining assumptions in special circumstances; drawing figures; trying; comparing to prior general conclusions; establishing a proof or finding a counter-example; reviewing the process of forming hypotheses; setting up a causal relationship between the assumptions and prior knowledge.*

Keywords: *Learning activity, hypothesis testing, mathematics teaching.*

1. Mở đầu

Theo K. K. Platônôp, quá trình tư duy bao gồm nhiều giai đoạn kế tiếp nhau, trong đó có việc kiểm định giả thuyết (GT). Hoạt động kiểm định GT giúp người nghiên cứu loại bỏ, điều chỉnh hoặc củng cố niềm tin vào GT. Khi niềm tin được củng cố, phải tiếp tục suy diễn để đưa ra định nghĩa hoặc thiết lập các phép chứng minh nhằm chính xác hóa GT, từ đó thu nhận hành động tư duy mới. Nếu GT bị bác bỏ thì cần sự điều chỉnh để hình thành GT mới và tiếp tục kiểm tra lại, việc làm này có thể lặp đi lặp lại cho đến khi có kết quả mong muốn [1; tr 23]. Bên cạnh đó, trang bị những hoạt động để kiểm định GT cũng góp phần bồi dưỡng năng lực giải quyết vấn đề. Một số nghiên cứu khẳng định rằng các hoạt động xác định và kiểm nghiệm GT tốt nhất là nên được tổ chức như các kế hoạch toàn diện, trong đó giáo viên (GV) đóng vai trò hướng dẫn [2; tr 107]. Chính vì vậy, để nâng cao hiệu quả hoạt động dạy học Toán ở trường phổ thông, bài viết này, chúng tôi quan tâm đến việc đề xuất một số hoạt động cơ bản giúp học sinh (HS) thực hiện giai đoạn kiểm định GT trong quá trình học tập môn *Toán* theo hướng tìm tòi, phát hiện tri thức mới.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. GT và vấn đề kiểm định GT trong dạy học môn Toán

Theo Từ điển toán học thông dụng: "Một nhận xét nào đó về một đám đông được gọi là một GT. Việc kiểm tra để xác định sự đúng sai của một GT dựa trên các thông tin đã có được gọi là kiểm định GT" [2; tr 364]. Khi nói có một GT A, nghĩa là có một mệnh đề A đã diễn đạt rõ ràng nhưng chưa được chứng minh. Dù chưa biết A đúng hay không nhưng dẫu sao vẫn ít nhiều ta tin vào GT của mình. Trong quá trình suy nghĩ, theo G. Polya: "Có thể xuất hiện những lí lẽ rõ ràng hơn, tuy vẫn chưa chứng minh được A nhưng chắc chắn có lợi cho A: các lí lẽ theo tương tự, theo phương pháp quy nạp, theo các trường hợp có liên quan, theo kinh nghiệm chung hoặc theo sự đơn giản riêng của chính bản thân A. Những lí lẽ như vậy không cho một chứng minh chặt chẽ, nhưng có thể làm cho A trở nên có lí hơn" [3; tr 223].

Trong cuộc sống, khi nói đến vấn đề chứng minh, một dạng đơn giản là kiểm tra tính đúng đắn của khẳng định nào đó. Trong toán học, kiểm tra và chứng minh tuy có sự liên hệ nhưng là hai vấn đề khác nhau. Chẳng hạn, với tất cả các hình tam giác được vẽ HS thấy các đường trung tuyến đồng quy, khi đo góc HS thấy hai góc đối đỉnh có cùng số đo, khi gấp hình HS biết hai góc đối đỉnh thì trùng khít lên nhau. Tuy nhiên, HS cần biết đo góc, gấp hình, vẽ hình không phải là chứng minh, nó chỉ là kiểm tra. Tính chân thực của mệnh đề toán học tổng quát không thể thử trực tiếp trên vô số trường hợp.

2.2. Một số hoạt động cơ bản trong tiến trình kiểm định GT

Kiểm tra để xác định sự đúng sai của GT là công việc quan trọng của người nghiên cứu. Theo góc độ lí thuyết hoạt động thì kiểm định GT có thể xem là quá trình giải quyết vấn đề, theo góc độ giải toán thì kiểm định GT được xem là quá trình giải bài toán. Dựa trên những hoạt động đặc thù của toán học, chúng tôi cho rằng việc kiểm tra một phát biểu toán học có thể tiến hành bằng các hoạt động sau:

Hoạt động 1: Giải theo những cách khác nhau. Đây được xem là hoạt động có hiệu quả để kiểm tra

* Trường Đại học Vinh

tính đúng đắn của một phát biểu toán học. Bởi vì trong trường hợp này nếu có cùng kết quả thì niềm tin về tính đúng đắn của điều đã phát biểu được tăng lên, nếu cho kết quả khác nhau thì buộc HS phải xem xét lại các bước trong quá trình thực hiện cách giải hoặc suy nghĩ lại điều đã phát biểu.

Hoạt động 2: Xem xét GT trong trường hợp đặc biệt. Sử dụng các trường hợp đặc biệt để kiểm tra một phát biểu toán học là cách làm phù hợp với tính logic và chặt chẽ của toán học. Bởi lẽ tính đúng đắn trong các trường hợp đặc biệt làm tăng thêm niềm tin cho GT, tuy nhiên chỉ không đúng trong một trường hợp thì phát biểu ấy hoàn toàn bị bác bỏ.

Hoạt động 3: Sử dụng hình vẽ trực quan. Các hình vẽ trực quan là chỗ dựa vững chắc cho những dự đoán, đồng thời nó cũng là một công cụ có hiệu lực để kiểm tra tính đúng đắn của những phát biểu toán học. Chẳng hạn: sử dụng trục số, đường tròn, đồ thị để kiểm tra các tính chất về nghiệm của một phương trình hay hệ phương trình, sử dụng hình vẽ để kiểm tra về mối liên hệ giữa các điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong hình học...

Hoạt động 4: Thử. Theo từ điển tiếng Việt, *thử* tức là: "Dùng các biện pháp kĩ thuật hay tâm lí để xem xét đặc tính, thực chất của sự vật hoặc con người cần tìm hiểu". Trong dạy học toán, việc *thử* mang lại những lợi ích khác nhau: kiểm tra kết quả một cách thuần túy, hoặc kiểm tra quá trình suy nghĩ, lập luận của HS [1; tr 1511].

Hoạt động 5: So sánh với một kết luận chung đã biết. Sử dụng hoạt động này để kiểm tra một GT thể hiện theo cách sau: nếu GT phù hợp với kết luận chung thì có thể được chấp nhận, ngược lại thì GT hoàn toàn bị bác bỏ.

Hoạt động 6: Thiết lập phép chứng minh hoặc tìm phản ví dụ. Giả sử ta đứng trước một bài toán chứng minh, trong đó phát biểu rõ ràng một điều khẳng định A mà ta chưa biết là đúng hay sai. Khi giải bài toán ta tự đặt cho mình mục đích là phải chứng minh hoặc bác bỏ A. Để chứng minh khẳng định A thì cần tìm kiếm trực tiếp những mệnh đề nào mà từ đó suy ra A hoặc là xây dựng một chiến lược riêng cho việc này. Để bác bỏ A cần tìm một phản ví dụ.

Hoạt động 7: Xác lập mối liên hệ nhân quả giữa GT và tri thức đã có. Các kiến thức toán học là một chuỗi mắt xích liên kết chặt chẽ với nhau. Những nội dung đã biết sẽ tạo tiền đề và giải thích cho sự xuất hiện của nội dung mới. Xác lập mối liên hệ nhân quả giữa GT và tri thức đã có thực chất là liên tưởng để xác định kiến thức liên quan tới GT, từ đó có thể huy động đúng kiến thức nhằm giải thích và nhận thức đúng đắn GT đã nêu.

Hoạt động 8: Xem xét lại quá trình hình thành GT. Ta biết rằng có nhiều cách để hình thành GT: quy nạp không hoàn toàn, xuất phát từ khẳng định đã có đối với đối tượng tương tự đã biết; khái quát hóa; chỉnh sửa và bổ sung từ GT chưa phù hợp; suy luận logic từ những tiền đề đúng... Do đó, nếu cần bác bỏ một GT, có thể dự đoán một bộ phận nào đó trong quá trình dẫn đến GT, cách tiếp cận hay thậm chí một chi tiết trong cách tiếp cận của quá trình ấy là chưa đúng. Sau đó, kiểm tra xem dự đoán có phù hợp với những điều đã hiểu biết ở từng giai đoạn nhất định của quá trình hay không. Khi cần khẳng định một GT ta có thể kiểm tra, làm sáng tỏ các suy luận để xác nhận lại từng bước đã thực hiện trong quá trình dẫn tới GT ấy.

2.3. Một số ví dụ minh họa việc hướng dẫn HS tiến hành kiểm định GT

Trong các ví dụ sau đây, chúng tôi trình bày một số tình huống dạy học, trong đó có khâu hướng dẫn HS kiểm định GT được chính các em đề ra ngay trong quá trình thực hiện các hoạt động.

Ví dụ 1. *Kiểm định GT đã hình thành thông qua hoạt động tính tích phân* $I=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)dx}{a^x+1}$ trong đó $\alpha \in R^+$ và $0<a\neq 1$ và *f(x)* là hàm số chẵn trên đoạn $[-\alpha;\alpha]$.

Tiến trình dạy học được thiết kế theo các hoạt động sau:

1) Tìm đặc điểm chung của một số bài toán: Trước khi bắt đầu tính toán cụ thể, GV yêu cầu HS nhận xét đặc điểm về cận của tích phân và hàm số dưới dấu tích phân đối với các tích phân sau:

$$I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{2^x+1}dx;\quad I_2=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{2^x+1}dx;\quad I_3=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx;$$

$$I_4=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{x^2.|\sin x|dx}{(2^x+1)}.$$

2) Hướng dẫn giải bài toán: GV hướng dẫn HS bằng những câu gợi ý phù hợp, cùng với HS thực hiện một ví dụ làm mẫu. Chẳng hạn tính $I_3=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx$ (1).

Hướng thứ nhất. Do cận đối xứng nên gợi ý cho HS chọn số 0 làm cận trung gian.

Từ gợi ý trên, HS đã biến đổi I_3 về dạng $I_3=\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx$ (2).

Xét $I_{3.1}=\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx$, do tử thức là hàm số chẵn, với gợi ý đặt $x=-t$, HS thu được

$$I_{3.1}=\int\limits_{\pi}^{0}\frac{\sin^2(-t)(-dt)}{3^{-t}+1}=-\int\limits_{0}^{\pi}\frac{3^t\sin^2 tdt}{3^t+1}=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{3^x\sin^2 xdx}{3^x+1}\ (3).$$

Thay (3) vào (2) và rút gọn, thu được

$$I_3=\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 xdx\ (4).$$

Hướng thứ hai. Do tích phân có cận đối xứng và tử thức là hàm số chẵn trên miền lấy tích phân, gợi ý HS chọn phép đổi biến $x=-t$.

Khi được GV yêu cầu biểu thị tích phân theo biến mới, HS đã biểu thị

$$I_3=\int\limits_{\pi}^{-\pi}\frac{\sin^2(-t)(-dt)}{3^{-t}+1}=-\int\limits_{\pi}^{-\pi}\frac{3^t\sin^2 tdt}{3^t+1}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{3^t\sin^2 tdt}{3^t+1}$$

Trở lại với biến *x* ban đầu, thu được $I_3=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{3^x\sin^2 xdx}{3^x+1}$ (5).

Cộng hai vế của (1) và (5), HS suy ra được $I_3=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 xdx$ (6).

Việc tính các tích phân dạng (4) hay (6) không khó đối với HS.

Tiếp theo, GV hướng sự chú ý của HS vào các hệ thức (4) và (6), là hai cách biểu thị khác nhau của I_3. HS nhận thấy $I_3=\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 xdx$ (7).

3) Hình thành GT:

- Yêu cầu HS dự đoán kết quả tương tự hệ thức (7) đối với các bài còn lại.
- Yêu cầu HS chú ý tới các hệ thức (4), (6), (7) để đề xuất GT cho tích phân dạng $I=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)dx}{a^x+1}$ với $\alpha\in R^+$, $0<a\neq 1$ và $f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-\alpha;\alpha]$. HS sẽ đề xuất được GT là $I=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)dx}{a^x+1}=\int\limits_{0}^{\alpha}f(x)dx$, $I=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)dx}{a^x+1}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx$ từ đó suy ra $\int\limits_{0}^{\alpha}f(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx$.

4) Kiểm định GT

Tích phân cần tính là trường hợp riêng của tích phân dạng tổng quát đang quan tâm. GT được hình thành đã dựa trên cách giải và kết quả cụ thể của việc tính tích phân I_3. Để kiểm tra tính đúng đắn của GT, GV yêu cầu HS kiểm tra từng phép biến đổi cụ thể trong quá trình tính I_3 và xác nhận lại các bước đã thực hiện đối với dạng tổng quát $I=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)dx}{a^x+1}$ (Sử dụng hoạt động 8).

Ví dụ 2. Kiểm định GT có thể đặt ra khi học nội dung "Hàm số chẵn, hàm số lẻ".

1) Hình thành GT1:

- Sau khi giới thiệu khái niệm hàm số chẵn, hàm số lẻ cho HS, GV yêu cầu HS vẽ đồ thị của hai hàm số $y=|x|$ và $y=4x^2$, nhận xét về tính chẵn lẻ của mỗi hàm số và đặc điểm của các đồ thị. HS rút ra nhận xét rằng các hàm số đã cho là hàm số chẵn, đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.
- GV tiếp tục gợi ý để HS có thể hình thành GT về hình ảnh của đồ thị hàm số chẵn.

Bằng hình ảnh trực quan HS đã hình thành GT1: Hàm số chẵn có đồ thị đối xứng qua trục tung.

2) Kiểm định GT1:

GT1 thu được từ việc quan sát đồ thị của một số hàm số chẵn cụ thể. GV yêu cầu HS kiểm tra nhằm khẳng định tính đúng, sai trong trường hợp tổng quát bằng cách thiết lập một phép chứng minh (Sử dụng hoạt động 6).

3) Hình thành GT2:

GV hướng dẫn HS khai thác tính chất "chẵn" của định nghĩa khái niệm hàm số chẵn để vận dụng vào việc giải phương trình $f(x)=0$, bất phương trình dạng $f(x)>0$ trong đó $f(x)$ là hàm số chẵn.

HS nhận thấy tập xác định của hàm số chẵn đối xứng qua gốc 0, giá trị của hàm số bằng nhau với mọi cặp giá trị đối xứng của đối số thuộc tập xác định. Do đó, HS đã hình thành GT2 sau đây: Để giải phương trình $f(x)=0$ khi $f(x)$ là hàm số chẵn chỉ cần tìm các nghiệm dương và lấy những số đối của chúng để được các nghiệm âm; riêng giá trị $x=0$ thì thử trực tiếp. Để giải bất phương trình $f(x)>0$ trong đó $f(x)$ là hàm số chẵn trước hết tìm các nghiệm x sao cho $x\geq 0$, nếu $(x_1;x_2)\subset[0;+\infty)$ là nghiệm thì $(-x_2;-x_1)$ cũng là nghiệm.

4) Kiểm định GT2:

GT2 được hình thành từ suy luận logic, do đó để xem xét tính đúng đắn cần kiểm tra lại tính hợp lí của từng bước lập luận (Sử dụng hoạt động 8).

Quá trình dạy học như trên, GV đã giúp HS hình thành và kiểm nghiệm được hai GT, đó là đặc điểm của đồ thị hàm số chẵn và cách giải phương trình $f(x)=0$, bất phương trình dạng $f(x)>0$ trong đó $f(x)$ là hàm số chẵn. HS cũng hoàn thành được công việc tương tự khi học về hàm số lẻ.

Ví dụ 3. Kiểm định GT hình thành khi yêu cầu HS lớp 11 dự đoán giá trị của $T=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$ (trước khi học công thức tính tổng cấp số nhân lùi vô hạn).

Với yêu cầu này, HS đã tính giá trị của tổng gồm 4, 5, 6 số hạng và nhận thấy khi số số hạng tăng thì giá trị của tổng cũng tăng dần về số 1. HS đã dự đoán tổng T có giá trị bằng 1, tuy nhiên GT này chưa được xác định về tính đúng đắn.

Để tăng thêm độ tin cậy cho GT này, GV hướng dẫn HS kiểm nghiệm thêm một số tình huống dựa trên những hình ảnh có tính trực quan (Sử dụng kết hợp các hoạt động 1, 3 và 4).

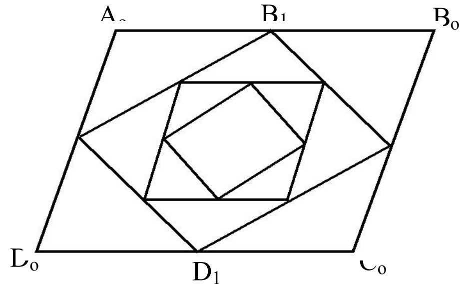
Tình huống 1. Cho đoạn thẳng AB có độ dài 1. Gọi A_1 là trung điểm của AB, A_k là trung điểm của $A_{k-1}B$ ($k\geq 2$). Giả sử $d_1, d_2,..., d_n,...$ lần lượt là độ dài các đoạn AA_1, A_1A_2, A_2A_3,... ,$A_{n-1}A_n$,... Hãy dự đoán giá trị của tổng $D = d_1 + d_2 ... + d_n+...$

Bằng trực quan HS thấy: biểu thức *D* thực chất là biểu thức *T*, hơn nữa *D* lớn dần và sẽ lấp kín đoạn thẳng *AB* có độ dài 1 khi n ngày càng tăng.

Tình huống 2. Cho tam giác $A_0B_0C_0$ có diện tích bằng 1. Gọi A_1 là trung điểm của B_0C_0, A_k là trung điểm của $A_{k-2}C_0$ $(k\geq 2)$. Giả sử $S_1, S_2,..., S_n,...$ lần lượt là diện tích các tam giác $A_0B_0A_1$, $A_0A_1A_2$, ..., $A_{n-2}A_{n-1}A_n$,... Hãy dự đoán giá trị của tổng $S=S_1+S_2+...+S_n+...$

Bằng trực quan HS thấy: biểu thức *S* thực chất là biểu thức *T*, hơn nữa *S* lớn dần và sẽ lấp kín tam giác $A_0B_0C_0$ có diện tích bằng 1 khi n ngày càng tăng.

Tình huống 3. Cho hình bình hành $A_0B_0C_0D_0$ có diện tích bằng 1. Gọi B_i, C_i, D_i, A_i lần lượt là trung điểm của các cạnh $A_{i-1}B_{i-1}$, $B_{i-1}C_{i-1}$, $C_{i-1}D_{i-1}$, $D_{i-1}A_{i-1}$ $(i\geq 1)$. Kí hiệu S_i là tổng diện tích các tam giác giới hạn bởi các hình bình hành $A_{i-1}B_{i-1}\ C_{i-1}D_{i-1}$ và $A_iB_iC_iD_i$ $(i\geq 1)$. Hãy dự đoán giá trị của tổng $S=S_1+S_2+...+S_n+...$



Hình 1

Bằng trực quan HS thấy: biểu thức *S* thực chất là biểu thức *T*, hơn nữa *S* lớn dần và sẽ lấp kín hình bình hành $A_0B_0C_0D_0$ có diện tích bằng 1 khi n ngày càng tăng.

Biểu thức T có thể được thiết lập bằng nhiều cách, sử dụng các tình huống trên, HS càng tin tưởng về dự đoán đã đưa ra ban đầu. Tính đúng đắn của GT sẽ được khẳng định khi học công thức tính tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn.

3. Kết luận

Dạy học Toán theo định hướng phát huy tính tích cực tìm tòi, sáng tạo của HS cần chú ý tới việc yêu cầu HS hình thành GT và kiểm định tính đúng đắn của chúng. Đây là những bước trung gian quan trọng để từ những tri thức, kinh nghiệm đã có, kết hợp với môi trường dạy học phù hợp do GV tạo ra, HS có thể hình thành nên tri thức mới. Xác định các hoạt động và thiết kế các tình huống dạy học nhằm giúp HS có khả năng kiểm định những điều đã phát hiện trong tiến trình học tập là một việc làm có ý nghĩa thiết thực. ❑

Tài liệu tham khảo

[1] Hoàng Phê - Hoàng Thị Tuyền Linh - Vũ Xuân Lương - Phạm Thị Thủy - Đào Thị Minh Thu - Đặng Thanh Hòa (2011). *Từ điển tiếng Việt*. NXB Đà Nẵng.

[2] Ngô Thúc Lanh - Đoàn Quỳnh - Nguyễn Đình Trí (2000). *Từ điển toán học thông dụng*. NXB Giáo dục.

[3] Robert J. Marzano (2011). *Nghệ thuật và khoa học dạy học*. NXB Giáo dục Việt Nam.

[4] Nguyễn Bá Kim (2015). *Phương pháp dạy học môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm.

[5] G. Polya (2010). *Toán học và những suy luận có lí*. NXB Giáo dục Việt nam.

[6] Đào Tam (chủ biên) - Lê Hiển Dương (2008). *Tiếp cận các phương pháp dạy học không truyền thống trong dạy học toán ở trường đại học và trường phổ thông*. NXB Đại học Sư phạm.

[7] Đỗ Thị Thanh (2014). *Kiểm định một số giả thuyết về sai lầm của học sinh trong dạy học hình học không gian*. Tạp chí Giáo dục, số 334, tr 57-59.