VỀ NHÓM CON CỦA NHÓM TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT TRÊN VÀNH CHÍNH QUY VON NEUMANN GIAO HOÁN CHỨA NHÓM CON CÁC MA TRẬN ĐƯỜNG CHÉO

Phan Hoàng Chơn[1]

ABSTRACT

Let R be a commutative Von Neumann regular ring. In this paper we study the latice of subgroups of general linear groups $G=GL_n(R)$ containing group $D=D_n(R)$ of diagonal matrices. We show that if R is a ring whose residue class fields all have at least seven elements, then D is a fan subgroup of group G.

Keywords: General linear group, fan subgroup

Title: On subgroups of the general linear group over a Von Neumann regular ring containing the group of diagonal matrices

TÓM TẮT

Cho R là vành chính quy Von Neumann giao hoán. Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu dàn các nhóm con của nhóm tuyến tính tổng quát $G=GL_n(R)$ chứa nhóm con $D=D_n(R)$ của các ma trận đường chéo. Chúng tôi chứng minh rằng nếu R là vành có tất cả các trường thặng dư đều chứa không ít hơn bảy phần tử, thì D là nhóm con quạt của nhóm G.

Từ khóa: Nhóm tuyến tính tổng quát, nhóm con quạt

1 GIỚI THIỆU

Cho *R* là một vành có đơn vị bất kỳ, $G=GL_n(R)$ là *nhóm tuyến tính tổng quát* các ma trận khả nghịch cấp $n\geq 2$ trên *R*, $D=D_n(R)$ là nhóm con các ma trận đường chéo khả nghịch của nhóm *G*. Chúng tôi quan tâm đến các nhóm con trung gian *H* giữa *D* và *G*. Với *R* là một trường có không ít hơn bảy phần tử, dàn các nhóm con trung gian *H* được mô tả bởi (Borevich Z. I., 1976). Sau đó, kết quả này được mở rộng cho vành nửa địa phương (không cần giao hoán), trong (Borevich Z. I. and N. A. Vavilov, 1978), và trên vành chính quy Von Neumann giao hoán thỏa điều kiện (Φ) trong (Bui Xuan Hai and T. N. Hoi, 1994). Kết quả của bài báo này là một cách mô tả dàn các nhóm con trung gian cho trường hợp vành chính quy Von Neumann giao hoán (không cần có điều kiện (Φ)).

Với kết quả của (Borevich *et al*, 1976 ; 1978), (Hai *et al*, 1994), dàn các nhóm con trung gian *H* được mô tả theo ngôn ngữ *lưới* (*net*) và *nhóm con lưới (net subgroup)*. Cụ thể, với một số giả thiết, mọi nhóm con *H*, $D \leq H \leq G$, tồn tại duy nhất một *D-lưới* σ cấp *n* sao cho $G(\sigma) \leq H \leq N(\sigma)$, trong đó $N(\sigma)$ là chuẩn hóa tử của nhóm con *D*-lưới $G(\sigma)$ trong *G*.

Nhắc lại: *Cho D là một nhóm con của nhóm G. Họ các nhóm con trung gian giữa D và G,* $\{G_\alpha, N_\alpha\}$*, trong đó* N_α *là chuẩn hóa tử của* G_α*, được gọi là một quạt của nhóm con D nếu với mọi nhóm con trung gian H đều tồn tại duy nhất một chỉ số* α *sao cho* $G_\alpha \leq H \leq N_\alpha$*. Nhóm con D của G có quạt được gọi là nhóm con quạt.*

Các kết quả trong (Borevich *et al*, 1976; 1978), và (Hai *et al*, 1994), nhóm con các ma trận đường chéo *D* là nhóm con quạt của nhóm tuyến tính tổng quát *G*.

Kết quả chính của bài báo là định lý sau:

[1] Bộ môn Toán, Khoa Khoa học.

Đinh lý. *Cho R là vành chính quy Von Neumann giao hoán với tất cả các trường thặng dư không ít hơn bảy phần tử. Khi đó,* $D = D_n(R)$*, n≥2, nhóm các ma trận đường chéo, là nhóm con quạt của nhóm* $G = GL_n(R)$*, nhóm tuyến tính tổng quát các ma trận cấp n trên R.*

Trong bài báo này chúng tôi dùng các ký hiệu sau: R là vành có đơn vị bất kỳ; R^* là nhóm các phần tử khả nghịch của R; I là ma trận đơn vị; e_{ij} là ma trận với 1 ở vị trí (i,j) các vị trí còn lại bằng 0; $t_{ij}(x)$ là phép co sơ cấp (*transvection*), $t_{ij}(x)=I+xe_{ij}$, $x \in R$.

2 MỘT SỐ KẾT QUẢ TRÊN VÀNH CHÍNH QUY VON NEUMANN GIAO HOÁN

Mục này giới thiệu về vành chính quy Von Neumann, unit-chính quy, đặc biệt là trong trường hợp giao hoán, và một vài tính chất cần cho sau này.

Định nghĩa 2.1 *Một vành có đơn vị R là vành chính quy Von Neumann (tương ứng unit-chính quy) nếu với mọi* $x \in R$ *tồn tại* $y \in R$ *(tương ứng* $y \in R^*$*) sao cho* $xyx=x$.

Với vành chính quy Von Neumann ta có kết quả sau:

Định lý 2.1 (Xem Goodeal. K. R, 1991, Hệ quả 4.2). *Mọi vành chính quy Von Neumann giao hoán đều là unit-chính quy.*

Chú ý rằng mọi phần tử trong vành unit-chính quy đều phân tích được thành tổng hai phần tử khả nghịch.

Cho R là một vành chính quy Von Neumann giao hoán, và $M = \{M_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ là tập tất cả các ideal tối đại của R. Khi đó ta đặt

$$P = \prod_{\alpha \in \Omega} R/M_\alpha$$

là tích trực tiếp của các trường.

Xét đồng cấu vành $f : R \to P$ biến $x \mapsto (x + M_\alpha)$. Dễ thấy rằng nhân của f là giao của tất cả các ideal tối đại của R, bằng Radical Jacobson. Vì Radical Jacobson của R là không (xem Goodeal *et al*, 1991, Hệ quả 2.1 (c)), nên f là đơn cấu từ R vào P. Vậy R có thể được xem là vành con chứa đơn vị của tích trực tiếp của các trường

$$P = \prod_{\alpha \in \Omega} R/M_\alpha$$

3 KẾT QUẢ TRÊN TÍCH TRỰC TIẾP CỦA CÁC TRƯỜNG

Dàn các nhóm con trung gian của nhóm tuyến tính tổng quát chứa nhóm con các ma trận đường chéo trên tích trực tiếp của các trường được suy ra từ kết quả trong (Borevich *et al*, 1976).

3.1 Lưới và nhóm con lưới

Cho R là một vành có đơn vị bất kỳ.

Định nghĩa 3.1. *Với số tự nhiên* n*, một bảng vuông cấp n* $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \le i, j \le n$*, các ideal hai phía* σ_{ij} *của R, được gọi là một lưới các ideal của R cấp n nếu*

$$\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij} \qquad (1)$$

với mọi giá trị khác nhau i, j và r. Nếu thêm $\sigma_{ii} = R$ *với mọi i=1,2,…,n thì lưới* σ *được gọi là một D-lưới.*

Với lưới σ bất kỳ, ta ký hiệu

$$M(\sigma) = \{a = (a_{ij}) : a_{ij} \in \sigma_{ij}, \forall i, j\}$$

Do (1) nên $M(\sigma)$ là một vành con của $M_n(R)$. Hiển nhiên ma trận đơn vị *I* chứa trong $M(\sigma)$ khi và chỉ khi σ là một *D*-lưới. Tập $I + M(\sigma) = \{I + a : a \in M(\sigma)\}$ là một hệ thống nhân. Với mỗi *D*-lưới σ, $M(\sigma) = I + M(\sigma)$.

Đinh nghĩa 3.2. *Cho σ là một lưới các ideal của R cấp n bất kỳ. Nhóm con lớn nhất của $G = GL_n(R)$ chứa trong $I + M(\sigma)$ được gọi là nhóm con lưới của G liên kết với lưới σ và ký hiệu là $G(\sigma)$. Nếu σ là D-lưới, thì $G(\sigma)$ được gọi là nhóm con D-lưới.*

Cho *R* là một vành thỏa với mọi phần tử của *R* đều phân tích được thành tổng của hữu hạn các phần tử khả nghịch trong *R*. Cho *H* là nhóm con của nhóm $G = GL_n(R)$, chứa nhóm con $D = D_n(R)$ các ma trận đường chéo. Với mỗi cặp *i* và *j* khác nhau ta đặt

$$\sigma_{ij} = \{x \in R : t_{ij}(x) \in H\}$$

Dễ thấy σ_{ij} là ideal của *R* và $\sigma_{ii} = R$ với mọi *i=1,2,...,n*. Do đó ta có một *D*-lưới $\sigma = (\sigma_{ij})$ cấp *n* các ideal ideal của *R*. Ta gọi nó là *D*-lưới liên kết với *H*.

Với K là trường có không ít hơn bảy phần tử thì ta có kết quả sau.

Định lý 3.1. (Borevich *et al*, 1976) *Cho K là trường có không ít hơn bảy phần tử. H là nhóm con của $G = GL_n(K), n \geq 2$, chứa nhóm con $D = D_n(K)$ các ma trận đường chéo. Nếu σ là một D-lưới liên kết với H, thì*

$$G(\sigma) \leq H \leq N(\sigma) \qquad (2)$$

trong đó $N(\sigma)$ là chuẩn hóa tử của nhóm con D-lưới $G(\sigma)$. Ngược lại, nếu (2) *thỏa với một D-lưới σ, thì σ là D-lưới liên kết với H.*

Cho *P* là tích trực tiếp của các trường $P = \prod_{\alpha \in \Omega} K_\alpha$

trong đó K_α là các trường. Xét đồng cấu

$$f : M_n(P) \to \prod_{\alpha \in \Omega} M_n(K_\alpha)$$

$$((a^\alpha)_{ij}) \mapsto ((a_{ij}^\alpha)_\alpha)$$

trong đó $a_{ij}^\alpha \in K_\alpha$ là ảnh của $(a^\alpha)_{ij}$ qua phép chiếu lên K_α. Dễ thấy f là một đẳng cấu vành, do đó, nó cảm sinh một đẳng cấu nhóm

$$GL_n(P) \cong \prod_{\alpha \in \Omega} GL_n(K_\alpha). \qquad (3)$$

3.2 Kết quả trong tích trực tiếp của các trường

Định lý 3.2. *Cho P là tích trực tiếp của các trường có không ít hơn bảy phần tử. H là nhóm con của $G = GL_n(P), n \geq 2$, chứa nhóm con $D = D_n(P)$ các ma trận đường chéo. Nếu σ là một D-lưới liên kết với H, thì*

$$G(\sigma) \leq H \leq N(\sigma) \qquad (4)$$

trong đó $N(\sigma)$ là chuẩn hóa tử của nhóm con D-lưới $G(\sigma)$. Ngược lại, nếu (4) thỏa với một D-lưới σ, thì σ là D-lưới liên kết với H.

Chứng minh. Do (3) nên với mỗi nhóm con H của G chứa D đều tồn tại duy nhất nhóm con H_α của $G_\alpha = GL_n(K_\alpha)$ chứa nhóm $D_\alpha = D_n(K_\alpha)$ sao cho

$$H = \prod_{\alpha\in\Omega} H_\alpha .$$

Do K_α là trường có không ít hơn bảy phần tử, nên theo Định lý 3.1, tồn tại duy nhất một $D_\alpha -$lưới σ_α các ideal của K_α cấp n liên kết với H_α sao cho

$$G(\sigma_\alpha) \le H_\alpha \le N(\sigma_\alpha) \tag{5}$$

trong đó $N(\sigma_\alpha)$ là chuẩn hóa tử của nhóm con $D_\alpha -$lưới $G(\sigma_\alpha)$ trong G_α.

Đặt
$$\sigma = \prod_{\alpha\in\Omega} \sigma_\alpha$$

là một D-lưới các ideal của P cấp n liên kết với H thỏa

$$G(\sigma) \le H \le N(\sigma).$$

Tính duy nhất của D-lưới σ suy ra từ tính duy nhất của các $D_\alpha -$lưới σ_α.

4 KẾT QUẢ CHÍNH TRÊN VÀNH CHÍNH QUY VON NEUMANN

Bổ đề 4.1. *Cho R là một vành con chứa đơn vị 1 của vành S. Nếu các nhóm con trung gian H' của $G' = GL_n(S)$ chứa nhóm con đường chéo $D' = D_n(S)$ thỏa kết luận của Định lý 3.1, thì tồn tại một họ các nhóm con trung gian $\{G_\sigma, N_\sigma = N_G(G_\sigma)\}$ thỏa, với mọi nhóm con trung gian H giữa, $D = D_n(R)$ và $G = GL_n(R)$, tồn tại duy nhất chỉ số σ sao cho*

$$G_\sigma \le H \le N_\sigma . \tag{6}$$

Chứng minh. Vì với $D \le H \le G$, thì $H' = \langle D'; H \rangle$ là nhóm con trung gian giữa D' và G', nên tồn tại duy nhất một D'-lưới $\sigma = (\sigma_{ij})$ các ideal của S, liên kết với H', sao cho

$$G(\sigma) \le H' \le N(\sigma). \tag{7}$$

Đặt $G_\sigma = G(\sigma) \cap H$. Rõ ràng $G_\sigma \le H$.

Với mọi $x \in H$, thì $x \in H'$, bởi (7), nên

$$G_\sigma^x = (G(\sigma) \cap H)^x = G(\sigma)^x \cap H^x = G(\sigma) \cap H = G_\sigma .$$

Vậy, $\quad H \le N_\sigma = N_G(G_\sigma)$.

Vì với mỗi H, H' là duy nhất nên σ là duy nhất.

Bổ đề đã được chứng minh.

Định lý 4.1. *Cho R là vành chính quy Von Neumann giao hoán với tất cả các trường thặng dư đều có không ít hơn bảy phần tử. Khi đó* $D = D_n(R)$*, n≥2, nhóm các ma trận đường chéo, là nhóm con quạt của* $G = GL_n(R)$*, nhóm tuyến tính tổng quát trên R.*

Chứng minh. Theo giả thiết thì R xem như một vành con chứa đơn vị của tích trực tiếp của các trường

$$P = \prod_{\alpha \in \Omega} K_\alpha ,$$

trong đó $K_\alpha, \forall \alpha \in \Omega$, là các trường có không ít hơn bảy phần tử. Do đó, áp dụng Định lý 3.2 và Bổ đề 4.1, định lý được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Borevich Z. I., 1976, A description of the subgroups of the general linear group that contain the group of diagonal matriecs. *in*: Zap. Nauc. Sem. Leningr. Otd. Math. Inst., vol. 64, pp. 12-29.

Borevich Z. I. and N. A. Vavilov, 1978, Subgroups of general linear group over a simelocal ring containing the group of diagonal matrices. i*n*: Trud. Math. Inst. Steklov., vol. 148, pp. 43-57.

Bùi Xuân Hải, 1990, Nhóm tuyến tính, NXB Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh.

Bui Xuan Hai and T. N. Hoi, 1994, On subgroups of the general linear group over a commutative Von Neumann regular ring. i*n*: Ata Math. Vietnamica, vol. 19, pp. 19-30.

Goodeal K. R., 1991, Von Neumann regular rings, Malabar, Florida.

Hahn A. L. and O. T. O'Meara, 1989, The classical groups and K-theory, Springer, New York.

Lam T. Y., 1991, A course in non-commutative rings, GMT No. 131, Springer-Verlag.