Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
website: sj.ctu.edu.vn

TÍNH TRƠN CỦA NGHIỆM SUY RỘNG CỦA BÀI TOÁN BIÊN BAN ĐẦU THỨ HAI ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN SÓNG TRONG HÌNH TRỤ VỚI ĐÁY KHÔNG TRƠN

Phùng Kim Chức[1]

[1] *Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*

Thông tin chung:
Ngày nhận: 19/05/2015
Ngày chấp nhận: 27/10/2015

Title:
The smoothness of the generalized solution for the seccond initial boundary problem for hyperbolic equation in infinite cylinders vith non-smooth base

Từ khóa:
Bài toán giá trị biên ban đầu thứ hai, Điểm nón, nghiệm suy rộng, tính trơn của nghiệm

Keywords:
Second inital boundary value problem, conical points, generalized solution, smoothness of solution

ABSTRACT

The purpose of this paper is to study the smoothness of generalized solution for the seccond initial boundary value problem for hyperbolic equation in infinite cylinders with base containing conical points. Some important results on the unique existence, smoothness of the solution for the problem in Sobolev spaces were given.

TÓM TẮT

Bài báo này công bố kết quả nghiên cứu về tính trơn của nghiệm suy rộng của bài toán giá trị biên ban đầu thứ hai đối với phương trình truyền sóng (phương trình hyperbolic) trong hình trụ vô hạn với đáy chứa điểm nón. Một số kết quả quan trọng về sự tồn tại duy nhất, tính trơn của nghiệm của bài toán trong các không gian Sobolev đã được trình bày ở đây.

1 MỞ ĐẦU

Trong bài báo này, chúng tôi xét bài toán biên ban đầu thứ hai đối với phương trình hyperbolic trong miền trụ vô hạn với đáy không trơn, bài toán đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm. Các hệ số của phương trình hyperbolic bậc hai được xét ở đây phụ thuộc vào cả hai biến thời gian và không gian. Cấu trúc của bài báo gồm 5 phần có thể mô tả như sau: Trước tiên chúng tôi giới thiệu một vài không gian hàm và các kí hiệu trong mục 1; Thiết lập bài toán và các kết quả chính được trình bày trong mục 2; Mục 3 giới thiệu một số bổ đề phụ trợ; Mục 4 trình bày chứng minh định lí về tính trơn của nghiệm suy rộng và mục 5 giới thiệu một số hướng nghiên cứu tiếp theo.

Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ với biên của nó là $\partial\Omega$ thỏa mãn điều kiện $\Gamma = \partial\Omega \setminus \{O\}$ là mặt khả vi vô hạn và Ω trùng với nón $K = \{x : \frac{x}{|x|} \in G\}$ trong lân cận của gốc tọa độ O, ở đó G là một miền trơn trong mặt cầu đơn vị S^{n-1} của $\mathbb{R}^n$.

Với mỗi số thực dương T, đặt $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$, $\Omega_\infty = \Omega \times (0,\infty)$, $\overline{\Omega}_\infty = \overline{\Omega} \times (0,\infty)$.

Với mỗi đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, ta đặt $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ và kí hiệu $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha n}}$.

Với mỗi hàm véc tơ giá trị phức $u=(u_1,...,u_s)$ xác định trong Ω, ta kí hiệu $D_u^\alpha=(D_{u_1}^\alpha,...,D_{u_s}^\alpha)$, $u_{t^j}=\dfrac{\partial^j u}{\partial t^j}=(\dfrac{\partial^j u_1}{\partial t^j},...,\dfrac{\partial^j u_s}{\partial t^j})$, $|u|=(\sum\limits_{j=1}^{s}|u_j|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Giả sử l là một số nguyên không âm, trong bài báo này chúng tôi sử dụng các không gian hàm sau.

$C^l(\Omega)$ là không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp $l>0$ trên Ω.

$C(\Omega)=C^0(\Omega)$ là không gian các hàm liên tục trên Ω.

$C^\infty(\Omega)=\bigcup\limits_{l=0}^{\infty}C^l(\Omega)$ là không gian các hàm khả vi vô hạn trên Ω.

$C_0^\infty(\Omega)$ là không gian các hàm khả vi vô hạn có giá compact trong Ω.

$L_2(\Omega)$ là không gian các hàm bình phương khả tích trên Ω với chuẩn

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}=(\int\limits_\Omega |u(x)|^2\,dx)^{\frac{1}{2}}$$

$L_2(\gamma,\Omega_T)$ là không gian các hàm bình phương khả tích trên Ω_T với chuẩn

$$\|u\|_{L_2(\gamma,\Omega_T)}=(\int\limits_{\Omega_T}|u(x,t)|^2\,e^{-2\gamma t}dxdt)^{\frac{1}{2}}$$

$H^l(\Omega)$ là không gian gồm các hàm véc tơ $u(x)$ có đạo hàm suy rộng $D^p u\in L_2(\Omega),|p|\le l$, với chuẩn

$$\|u\|_{H^l(\Omega)}=(\int\limits_\Omega\sum_{|p|\le l}|D^p u|^2\,dx)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

$H^{l,0}(e^{\gamma t},\Omega_T)(\gamma\in\mathbb{R})$ là không gian gồm các hàm $u(x,t)$, $(x,t)\in\Omega_T$ có đạo hàm suy rộng $D^p u,|p|\le l$ với chuẩn

$$\|u\|_{H^{l,0}(e^{\gamma t},\Omega_T)}=(\int\limits_{\Omega_T}\sum_{|p|\le l}|D^p u|^2\,e^{-2\gamma t}dxdt)^{\frac{1}{2}}<\infty$$

Đặc biệt, chúng ta đặt $L_2(\gamma,\Omega_T)=H^{0,0}(e^{\gamma t},\Omega_T)$.

$H^{l,1}(e^{\gamma t},\Omega_T)(\gamma\in\mathbb{R})$ là không gian gồm các hàm $u(x,t)$, $(x,t)\in\Omega_T$ có đạo hàm suy rộng $D^p u,|p|\le l$ với chuẩn

$$\|u\|_{H^{l,1}(e^{\gamma t},\Omega_T)}=(\int\limits_{\Omega_T}\sum_{|p|\le l}(|D^p u|^2+|u_t|^2)e^{-2\gamma t}dxdt)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

$L^\infty(0,T;L_2(\Omega))$ là không gian gồm các hàm giá trị phức đo được $u:(0,T)\to L_2(\Omega),t\mapsto u(.,t)$ thỏa mãn

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L_2(\Omega))}=\operatorname{ess}\sup_{0<t<T}\|u(.,t)\|_{L_2(\Omega)}$$

Bây giờ chúng ta sẽ giới thiệu toán tử vi phân sử dụng trong suốt bài báo

$$L=L(x,t,D)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j})+a\,, \qquad (1.1)$$

ở đó $a_{ij}\equiv a_{ij}(x,t)$, $i,j=1,...,n$ là các hàm giá trị phức bị chặn khả vi vô hạn trong $\overline{Q}_\infty$ và $a\equiv a(x,t)$ là hàm giá trị thực bị chặn khả vi vô hạn trong $\overline{Q}_\infty$. Hơn nữa chúng ta giả sử $a_{ij}(x,t)=\overline{a}_{ji}(x,t)$ với mọi .., điều này có nghĩa là toán tử L tự liên hợp hình thức. Giả sử rằng $a_{ij},i,j=1,...,n$ liên tục theo $x\in\overline{\Omega}$ đều với $t\in[0,\infty)$ và tồn tại một hằng số dương α_0 sao cho

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\ge\alpha_0|\xi|^2,\forall\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},(x,t)\in\overline{\Omega}_\infty. \qquad (1.2)$$

2 ĐẶT BÀI TOÁN VÀ CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ ($n\ge 2$) với biên của nó là $\partial\Omega$ thỏa mãn điều kiện $\Gamma=\partial\Omega\setminus\{0\}$ là mặt khả vi vô hạn. Hơn nữa ta giả sử rằng Ω trùng với nón $K=\{x:\frac{x}{|x|}\in G\}$ trong lân cận nào đó của gốc tọa độ O, ở đó G là một miền trơn trong mặt cầu đơn vị S^{n-1} của $\mathbb{R}^n$. Kí hiệu: $Q_T=\Omega\times(0,T)$, $S_T=\partial\Omega\times(0,T)$ $(T>0)$.

Trong hình trụ Q_T, $0<T\le\infty$, chúng ta xét bài toán biên ban đầu thứ hai đối với phương trình hyperbolic cấp hai:

$$L(x,t,D)u - u_{tt} = f(x,t)\,,\,(x,t)\in Q_T, \quad (2.1)$$

$$u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x\in\Omega \quad (2.2)$$

$$Nu\big|_{S_T} = 0, \quad (2.3)$$

ở đó $f(x,t)$ là véc tơ hàm giá trị phức, $L(x,t,D)$ là toán tử (1.1) đã giới thiệu ở trên,

$$Nu = N(x,t,D)u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(x_i,v)\,,$$

v là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài đến S_T.

Định nghĩa 2.1: *Hàm vectơ $u(x,t)$ được gọi là nghiệm suy rộng trong không gian $H^{1,1}(e^{\gamma t},Q_T)$ của bài toán (2.1) – (2.3) nếu $u(x,t)\in H^{1,1}(e^{\gamma t},Q_T), u(x,0)=0$ và với mỗi τ, $0<\tau<T$, đẳng thức sau*

$$\int_{Q_\tau} u_t\overline{\eta}_t dxdt - \int_{Q_\tau}(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial \eta}}{\partial x_i} - au\overline{\eta})dxdt = \int_{Q_\tau} f\overline{\eta}dxdt \quad (2.4)$$

đúng với với mọi hàm thử $\eta\in H^{1,1}(e^{\gamma t},Q_T)$, sao cho $\eta(x,t)=0$, $t\in[\tau,T)$.

Với mỗi số nguyên không âm *h,* ta đặt

$$\gamma_h = \frac{(n+1)(2h+1)\mu+\varepsilon_0}{2\mu_0}$$

ở đó: $$\varepsilon_0 = \frac{-(n+1)\mu+\sqrt{(n+1)^2\mu^2+4\lambda_0^2\mu_0}}{2} \geq 0$$

Định lý 2.2: **(**Định lí về tính trơn của nghiệm suy rộng). *Giả sử các hệ số của toán tử L(x,t,D) thỏa mãn điều kiện (1.2) và*

i) $\left\{|\frac{\partial^k a_{ij}}{\partial t^k}|,|\frac{\partial^k a}{\partial t^k}|\right\} \leq \mu, i,j=1,...,n, 0\leq k\leq h+1,$

$\forall(x,t)\in\overline{Q}_T, \mu = \text{const} > 0$

ii) $f_{t^k}\in L_2(\gamma_k,Q_T), 0\leq k\leq h$,

iii) $f_{t^k}(x,0)=0, 0\leq k\leq h-1$.

Khi đó với mọi số thực $\gamma>\gamma_h$, nghiệm suy rộng $u(x,t)$ trong không gian $H^{1,1}(e^{\gamma t},Q_T)$ của bài toán (2.1)-(2.3) có đạo hàm suy rộng theo t tới tận cấp h với $u_{t^k}\in H^{1,1}(\gamma,Q_T), k=0,...,h$. Hơn nữa bất đẳng thức sau đúng

$$\| u_{t^k} \|_{H^{1,1}(e^{\gamma t},Q_T)} \leq C\sum_{k=0}^{h} \|f_{t^k}\|^2_{L_2(\gamma_k,Q_T)}$$

ở đó C là hằng số dương không phụ thuộc vào u và f.

3 MỘT SỐ BỔ ĐỀ PHỤ TRỢ

Để chứng minh Định lí 2.2 trước tiên ta giới thiệu các bổ đề sau mà có thể tìm thấy cách chứng minh nó trong *Nguyen Manh Hung and Phung Kim Chuc (2012).*

Bổ đề 3.1: *Giả sử các hệ số $a_{ij}=a_{ij}(x,t), i,j=1,...,n, a=a(x,t)$ của toán tử L(x,t,D) thỏa mãn điều kiện (1.2) và $a_{ij}(x,t)$ liên tục theo $x\in\overline{\Omega}$ đều với $t\in[0,\infty)$. Thì tồn tại hai hằng số $\mu_0>0$ và $\lambda_0\geq 0$ sao cho*

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}dx - \int_\Omega au\overline{u}dx \geq \mu_0 \| u \|_{H^1(\Omega)}$$

$$-\lambda_0 \| u \|_{L^2(\Omega)}$$

với mọi u=u(x,t) $\in H^{1,0}(e^{\gamma t},Q_T)$.

Bổ đề 3.2: (Bất đẳng thức Gronwall-Bellman) *Giả sử u(t) và $\phi(t)$ là những hàm khả tích không âm trên đoạn [0,T] và $\phi(t)$ có đạo hàm $\phi'(t)$ khả tích trên [0,T] sao cho $u(t)\leq\phi(t)+L\int_{t_0}^{t}u(\tau)d\tau$*

với mọi $t\in[t_0,T], t_0\geq 0$, ở đó L là hằng số dương. Thì

$$u(t)\leq\phi(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{L(t-\tau)}\phi'(\tau)d\tau \text{ với mọi } t\in[t_0,T].$$

Bổ đề 3.3: Giả sử các hệ số của toán tử L(x,t,D) thỏa mãn điều kiện (1.2) và

i) $\left\{|\frac{\partial^k a_{ij}}{\partial t^k}|,|\frac{\partial^k a}{\partial t^k}|\right\} \leq \mu, i,j=1,...,n, k\leq 1,$

$\forall(x,t)\in\overline{Q}_T, \mu=\text{const}>0$,

ii) $f\in L_2(\gamma_0,Q_T)$, *với* $\gamma_0 = \frac{(n+1)\mu+\sqrt{(n+1)^2\mu^2+4\lambda_0^2\mu_0}}{4\mu_0}$,

iii) $f(x,0)=0$.

Thế thì với mọi số thực dương γ sao cho $\gamma > \gamma_0$, bài toán (2.1)-(2.3) có duy nhất một nghiệm suy rộng $u(x,t)$ trong không gian $H^{1,1}(e^{\gamma t}, Q_T)$. Hơn nữa bất đẳng thức sau đúng

$$\| u \|_{H^{1,1}(e^{\gamma t}, Q_\infty)} \le C \| f \|^2_{L^\infty(0,\infty;L_2(\Omega))}$$

ở đó C là hằng số dương không phụ thuộc vào u và f.

4 CHỨNG MINH ĐỊNH LÍ 2.2

Giả sử $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ là một hệ hàm trong $H^1(\Omega)$ sao cho bao đóng tuyến tính của nó lại chính là $H^1(\Omega)$ và một hệ trực chuẩn trong $L_2(\Omega)$. Chúng ta xét dãy hàm sau

$$u^N = \sum_{k=1}^N C_k^N(t)\varphi_k(x)$$

ở đó $(C_1^N(t),...,C_N^N(t))$ là nghiệm của hệ phương trình vi phân thường tuyến tính cấp hai:

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}\overline{\varphi}_l dx + \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}} - au^N\overline{\varphi}_l)dx = -\int_\Omega f\overline{\varphi}_l dx \qquad (4.1)$$

với điều kiện ban đầu là

$$C_k^N(0) = \frac{d}{dt}C_k^N(0) = 0,\ k = 1,...,N. \qquad (4.2)$$

Nhân đẳng thức (4.1) với $\overline{\frac{dC_l^N(t)}{dt}}$ và lấy tổng theo l từ 0 đến N, ta nhận được:

$$\int_\Omega u_{tt}^N\overline{u_t^N}dx + \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u_t^N}{\partial x_i}} - au^N\overline{u_t^N})dx = -\int_\Omega f\overline{u_t^N}dx \qquad (4.3)$$

Giả sử τ là một số dương, $\tau < T$, tích phân hai vế của (4,3) theo t từ 0 đến τ ta được

$$\int_{Q_\tau} u_{tt}^N\overline{u_t^N}dxdt + \int_{Q_\tau} (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u_t^N}{\partial x_i}} - au^N\overline{u_t^N})dxdt = -\int_{Q_\tau} f\overline{u_t^N}dxdt \qquad (4.4)$$

Cộng (4.4) với liên hợp phức của nó ta có

$$2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau} u_{tt}^N\overline{u_t^N}dxdt + 2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau} (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u_t^N}{\partial x_i}} - au^N\overline{u_t^N})dxdt = -2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau} f\overline{u_t^N}dxdt \qquad (4.5)$$

Từ đây, tích phân từng phần (4.5) với điều kiện (4.2) ta nhận được

$$\int_\Omega |u_t^N|^2 dx + \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u^N}{\partial x_i}} - au^N\overline{u^N})\Big|_{t=\tau} dx = \int_{Q_\tau} (\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u^N}{\partial x_i}} - \frac{\partial a}{\partial t}u^N\overline{u^N})dxdt - 2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau} f\overline{u_t^N}dxdt \qquad (4.6)$$

Cộng $\lambda_0\int_{Q_\tau}\frac{\partial(u^N\overline{u^N})}{\partial t}dxdt$ vào hai vế của (4.6) và sử dụng tích phân từng phần ta được

$$\int_\Omega |u_t^N|^2 dx + \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u^N}{\partial x_i}} - au^N\overline{u^N})\Big|_{t=\tau} dx + \lambda_0\int_\Omega (u^N\overline{u^N})\Big|_{t=\tau} dx = \int_{Q_\tau} (\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u^N}{\partial x_i}} - \frac{\partial a}{\partial t}u^N\overline{u^N})dxdt + \lambda_0\int_{Q_\tau}\frac{\partial}{\partial t}(u^N\overline{u^N})dxdt - 2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau} f\overline{u_t^N}dxdt \qquad (4.7)$$

Chúng ta có

$$\frac{\partial(u^N\overline{u^N})}{\partial t} = u_t^N\overline{u^N} + u^N\overline{u_t^N} = 2\operatorname{Re}(u^N\overline{u_t^N}).$$ Do đó

$$\int_\Omega |u_t^N(.,\tau)|^2 dx + \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u^N}{\partial x_i}} - au^N\overline{u^N})\Big|_{t=\tau} dx + \lambda_0\int_\Omega (u^N\overline{u^N})\Big|_{t=\tau} dx = \int_{Q_\tau} (\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u^N}{\partial x_i}} - \frac{\partial a}{\partial t}u^N\overline{u^N})dxdt$$

$$+2\operatorname{Re}\lambda_0\int_{Q_\tau}(u^N\overline{u_t^N})dxdt-2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau}f\overline{u_t^N}dxdt \quad (4.8)$$

Áp dụng bổ đề (3.1) và Bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\|u_t^N(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}+\mu_0\|u^N(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\le\int_{Q_\tau}(n\mu\sum_{i=1}^n|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2+\mu|u|^2)dxdt$$

$$+\int_{Q_\tau}((n-1)\mu+\varepsilon)|u|^2dxdt$$

$$+\int_{Q_\tau}(\frac{\lambda_0^2}{(n-1)\mu+\varepsilon}|u_t|^2+\delta|u_t^N|^2)dxdt$$

$$+\frac{\tau}{\delta}\|f\|^2_{L_2(\gamma_0,\Omega)}$$

$$\le\int_{Q_\tau}(n\mu\sum_{i=1}^n|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2+n\mu|u|^2)dxdt+\int_{Q_\tau}\varepsilon|u|^2\,dxdt$$

$$+\int_{Q_\tau}(\frac{\lambda_0^2}{\varepsilon}|u_t|^2+\delta|u_t^N|^2)dxdt+\frac{\tau}{\delta}\|f\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Từ đó ta có

$$\|u_t^N(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}+\mu_0\|u^N\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\le((n+1)\mu+\varepsilon)\int_0^\tau\|u^N\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt$$

$$+(\frac{\lambda_0^2}{\varepsilon}+\delta)\int_0^\tau\|u_t^N\|^2_{L_2(\Omega)}dt$$

$$+\frac{1}{\delta}\int_0^\tau\|f\|^2_{L_2(\Omega)}dt \quad (4.9)$$

ở đó $\varepsilon>0$, $\delta=\text{const}>0$ là các hằng số tùy ý. Từ (4.9) ta có

$$\|u_t^N(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}+\mu_0\|u^N(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\le(\frac{\lambda_0^2}{\varepsilon}+\delta)\int_0^\tau(\|u_t^N(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$+\frac{((n+1)\mu+\varepsilon)\varepsilon}{\lambda_0^2+\delta\varepsilon}\|u^N(x,t)\|^2_{H^1(\Omega)})dt$$

$$+\frac{1}{\delta}\int_0^\tau\|f\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt \quad (4.10)$$

ở đó $\varepsilon>0,\delta=\text{const}>0$ là các hằng số tùy ý. Bây giờ ta xét đẳng thức sau

$$\mu_0=\frac{((n+1)\mu+\varepsilon)\varepsilon}{\lambda_0^2+\delta\varepsilon}$$

ở đó μ_0,λ_0 là các hằng số được xác định trong Bổ đề 3.1 và μ lấy từ giả thiết của định lí.

Từ đẳng thức trên ta có

$$\delta=\frac{((n+1)\mu+\varepsilon)\varepsilon-\lambda_0^2\mu_0}{\mu_0\varepsilon}$$

Chọn $\varepsilon_0=\dfrac{-(n+1)\mu+\sqrt{(n+1)^2\mu^2+4\lambda_0^2\mu_0}}{2}\ge0$

Từ đó ta có $\delta>0$ với $\varepsilon>\varepsilon_0$ và

$$\frac{\lambda_0^2}{\varepsilon}+\delta=\frac{(n+1)\mu+\varepsilon}{\mu_0}>\frac{(n+1)\mu+\varepsilon_0}{\mu_0}$$

$$=\frac{(n+1)\mu+\sqrt{(n+1)^2\mu^2+4\lambda_0^2\mu_0}}{2\mu_0}=2\gamma_0$$

Từ đây viết (4.10) như sau:

$$\|u_t^N(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}+\mu_0\|u^N(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\le\frac{(n+1)\mu+\varepsilon}{\mu_0}\int_0^\tau(\|u_t^N(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$+\mu_0\|u^N(x,t)\|^2_{H^1(\Omega)})dt$$

$$+C(\varepsilon)\int_0^\tau\|f\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt \quad (4.11)$$

ở đó $\varepsilon>\varepsilon_0, C(\varepsilon)$ là hằng số dương phụ thuộc và ε.

Đặt

$$J_0^N(t)=\|u_t^N(.,t)\|^2_{L_2(\Omega)}+\mu_0\|u^N(.,t)\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Ta thấy với mọi $\gamma>\gamma_0$ tồn tại $\varepsilon>\varepsilon_0$ sao cho

$$2\gamma>2\gamma_0(\varepsilon)=\frac{(n+1)\mu+\varepsilon}{\mu_0}>2\gamma_0.$$

Từ (4.11) ta nhận được

$$J_0^N(\tau)\le2\gamma_0(\varepsilon)\int_0^\tau J_0^N(t)dt+C(\varepsilon)\int_0^\tau\|f\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt$$

ở đó $C(\varepsilon)$ là hằng số chỉ phụ thuộc vào ε. Từ bất đẳng thức này và Bổ đề 3.2 ta có

$$J_0^N(\tau) \le C(\varepsilon) e^{2\gamma_0(\varepsilon)\tau} \int_0^\tau e^{-2\gamma_0(\varepsilon)t} \|f\|^2_{L_2(\Omega)}\, dt \,. \quad (4.12)$$

Mặt khác ta có

$$\int_0^\tau e^{-2\gamma_0(\varepsilon)t} \|f\|^2_{L_2(\Omega)}\, dt \le \int_0^\tau e^{-2\gamma_0 t} \|f\|^2_{L_2(\Omega)}\, dt \le \|f\|^2_{L_2(\gamma_0,Q_T)} .$$

Từ (4.12) và bất đẳng thức trên ta nhận được

$$J_0^N(\tau) \le C(\varepsilon) e^{2\gamma_0(\varepsilon)\tau} \|f\|^2_{L_2(\gamma_0,Q_T)}\, dt \,.$$

Điều đó có nghĩa là

$$\|u_t^N(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)} + \mu_0 \|u^N(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)} \le C(\varepsilon) e^{2\gamma_0(\varepsilon)\tau} \|f\|^2_{L_2(\gamma_0,Q_T)}\, dt \quad (4.13)$$

Nếu $\mu_0 \ge 1$ thì từ (4.13) ta có

$$\|u_t^N(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u^N(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)} \le C(\varepsilon) e^{2\gamma_0(\varepsilon)\tau} \|f\|^2_{L_2(\gamma_0,Q_T)}\, dt \,.$$

Nếu $0 < \mu_0 < 1$ thì từ (4.13) ta có

$$\|u_t^N(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u^N(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)} \le \frac{C(\varepsilon)}{\mu_0} e^{2\gamma_0(\varepsilon)\tau} \|f\|^2_{L_2(\gamma_0,Q_T)}\, dt \,.$$

Tóm lại cả hai trường hợp $\mu_0 \ge 1$ và $0 < \mu_0 < 1$ ta thấy tồn tại một hằng số $C_0(\varepsilon) > 0$ chỉ phụ thuộc vào ε sao cho

$$\|u_t^N(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u^N(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)} \le C_0(\varepsilon) e^{2\gamma_0(\varepsilon)\tau} \|f\|^2_{L_2(\gamma_0,Q_T)}\, dt \,. \quad (4.14)$$

Nhân cả hai vế của (4.14) với $e^{-2\gamma\tau}$ sau đó lấy tích phân theo τ từ 0 đến T, ta được

$$\|u^N\|^2_{H^{1,1}(e^\gamma,Q_T)} \le C_0(\varepsilon) \|f\|^2_{L_2(\gamma_0,Q_T)} \int_0^T e^{2(\gamma_0(\varepsilon)-\gamma)} d\tau \quad (4.15)$$

Ta thấy $\forall \gamma > \gamma_0(\varepsilon)$ thì $\gamma_0(\varepsilon) - \gamma < 0$ và $\int_0^T e^{2(\gamma_0(\varepsilon)-\gamma)} d\tau$ hội tụ. Hơn nữa, ε phụ thuộc vào γ do đó từ (4.15) ta có

$$\|u^N\|^2_{H^{1,1}(e^\gamma,Q_T)} \le C \|f\|^2_{L_2(\gamma_0,Q_T)} \quad (4.16)$$

ở đó C là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào γ.

Từ (4.16) suy ra $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ là một dãy bị chặn đều trong không gian $H^{1,1}(e^{-\gamma t},Q_\infty)$. Do đó tồn tại một dãy con của dãy $\{u^N\}$ (ta vẫn dùng ký hiệu là $\{u^N\}$) hội tụ yếu trong $H^{1,1}(e^{-\gamma t},Q_\infty)$ tới nghiệm $u(x,t) \in H^{1,1}(e^{-\gamma t},Q_\infty)$ của bài toán.

Đạo hàm *h* lần theo biến *t* hai vế của (4.1) ta có

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^{h+2}} \overline{\varphi}_l dx + \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial t^h}\Big(a_{ij} \frac{\partial u^N}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}} - a u^N \overline{\varphi}_l\Big)\Big) dx = -\int_\Omega f_{t^h} \overline{\varphi}_l dx \quad (4.17)$$

Từ giả thiết của định lí ta nhận được $\overline{\dfrac{d^{h+}C_l^N(t)}{dt^{h+1}}} \in L^2(0,\tau),\ 0 < \tau < T$

Nhân đẳng thức (4.17) với $\overline{\dfrac{d^{h+1}C_l^N(t)}{dt^{h+1}}}$ và lấy tổng theo l từ 0 đến N, ta nhận được:

$$\int_\Omega u^N_{t^{h+2}} \overline{u^N_{t^{h+1}}} dx + \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n \Big(a_{ij} \frac{\partial u^N}{\partial x_j}\Big)_{t^h} \overline{\frac{\partial u^N_{t^{h+1}}}{\partial x_i}} - (a u^N)_{t^h} \overline{u^N_{t^{h+1}}}\Big) dx = -\int_\Omega f_{t^h} \overline{u^N_{t^{h+1}}} dx \quad (4.18)$$

Tích phân (4.18) trong khoảng $(0,\tau)$, ta được

$$\int_{Q_\tau} u^N_{t^{h+2}} \overline{u^N_{t^{h+1}}} dxdt + \int_{Q_\tau} \Big(\sum_{i,j=1}^n \Big(a_{ij} \frac{\partial u^N}{\partial x_j}\Big)_{t^h} \overline{\frac{\partial u^N_{t^{h+1}}}{\partial x_i}} - (a u^N)_{t^h} \overline{u^N_{t^{h+1}}}\Big) dxdt = -\int_{Q_\tau} f_{t^h} \overline{u^N_{t^{h+1}}} dxdt \quad (4.19)$$

Cộng (4.19) với liên hợp phức của nó ta được

$$2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau} u^N_{t^{h+2}}\overline{u^N_{t^{h+1}}}dxdt$$

$$+2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau}\Big(\sum_{i,j=1}^n \Big(a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\Big)_{t^h}\overline{\frac{\partial u^N_{t^{h+1}}}{\partial x_i}}-(au^N)_{t^h}\overline{u^N_{t^{h+1}}}\Big)dxdt$$

$$=-2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau} f_{t^h}\overline{u^N_{t^{h+1}}}dxdt \qquad (4.20)$$

Ta có

$$2\operatorname{Re}\int_{Q_T}\Big(\sum_{i,j=1}^n \Big(a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\Big)_{t^h}\overline{\frac{\partial u^N_{t^{h+1}}}{\partial x_i}}-(au^N)_{t^h}\overline{u^N_{t^{h+1}}}\Big)dxdt$$

$$=2\operatorname{Re}\int_{Q_T}\Big(\sum_{k=0}^h\binom{h}{k}\Big(\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^k a_{ij}}{\partial t^k}\frac{\partial u^N_{t^{h-k}}}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u^N_{t^{h+1}}}{\partial x_i}}-\frac{\partial^k a}{\partial t^k}u^N_{t^{h-k}}\overline{u^N_{t^{h+1}}}\Big)\Big)dxdt \quad (4.21)$$

ở đó $\binom{s}{k}=\dfrac{s!}{k!(s-k)!}$

Đặt

$$B_{t^k}(u,v,t)=\int_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^k a_{ij}}{\partial t^k}\frac{\partial u^N_{t^{h-k}}}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial v^N_{t^{h+1}}}{\partial x_i}}-\frac{\partial^k a}{\partial t^k}u^N_{t^{h-k}}\overline{v^N_{t^{h+1}}}\Big)dx, \quad (4.22)$$

Ta có $B(u,v,t)=B_{t^0}(u,v,t)$. Sử dụng tích phân từng phần và giả thiết

$a_{ij}=\overline{a}_{ji}, i,j=1,\dots,n,$

ta được công thức sau :

$$2\operatorname{Re}\int_0^\tau B_{t^k}(v,v_t,t)dt=B_{t^k}(v,v,\tau)-B_{t^k}(v,v,0)$$

$$-\int_0^\tau B_{t^{k+1}}(v,v,t)dt \qquad (4.23)$$

Từ (4.22) và sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta nhận được

$$B_{t^k}(u^N_{t^{h-k}},u^N_{t^{h+1}},t)=\int_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^k a_{ij}}{\partial t^k}\frac{\partial u^N_{t^{h-k}}}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u^N_{t^{h+1}}}{\partial x_i}}-\frac{\partial^k a}{\partial t^k}u^N_{t^{h-k}}\overline{u^N_{t^{h+1}}}\Big)dx$$

$$|B_{t^k}(u^N_{t^h},u^N_{t^h},t)|\ge(n+1)\|u^N_{t^h}\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad (4.24)$$

$$2\operatorname{Re}\int_{Q_T}\Big(\sum_{i,j=1}^n \Big(a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\Big)_{t^h}\overline{\frac{\partial u^N_{t^{h+1}}}{\partial x_i}}-(au^N)_{t^h}\overline{u^N_{t^{h+1}}}\Big)dxdt$$

$$=\sum_{k=0}^h\binom{h}{k}2\operatorname{Re}\int_0^\tau B_{t^k}(u^N_{t^{h-k}},u^N_{t^{h+1}},t)dt$$

Mặt khác, từ giả thiết $f_{t^k}(x,0)=0, 0\le k\le h-1$ và điều kiện (4.2) ta có

$$\frac{\partial u^N_{t^k}}{\partial x_i}=0, 0\le k\le h.$$

Sử dụng công thức (4.23) với $v=u^N_{t^h}$ và tích phân từng phần ta nhận được

$$2\operatorname{Re}\int_{Q_T}\Big(\sum_{i,j=1}^n \Big(a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\Big)_{t^h}\overline{\frac{\partial u^N_{t^{h+1}}}{\partial x_i}}-(au^N)_{t^h}\overline{u^N_{t^{h+1}}}\Big)dxdt$$

$$=B(u^N_{t^h},u^N_{t^h},\tau)-\int_0^\tau B_t(u^N_{t^h},u^N_{t^h},t)dt$$

$$+\sum_{k=1}^h\binom{h}{k}2\operatorname{Re}\int_0^\tau B_{t^k}(u^N_{t^{h-k}},u^N_{t^{h+1}},t)dt$$

$$=B(u^N_{t^h},u^N_{t^h},\tau)-\int_0^\tau B_t(u^N_{t^h},u^N_{t^h},t)dt$$

$$+\sum_{k=1}^h\binom{h}{k}2\operatorname{Re}B_{t^k}(u^N_{t^{h-k}},u^N_{t^h},\tau)dt$$

$$-\sum_{k=1}^h\binom{h}{k}2\operatorname{Re}\int_0^\tau B_{t^{k+1}}(u^N_{t^{h-k}},u^N_{t^h},t)dt$$

$$-\sum_{k=1}^h\binom{h}{k}2\operatorname{Re}B_{t^k}(u^N_{t^{h-k+1}},u^N_{t^h},t)dt$$

$$=B(u^N_{t^h},u^N_{t^h},\tau)-(2h+1)\int_0^\tau B_t(u^N_{t^h},u^N_{t^h},t)dt$$

$$+\sum_{k=1}^h\binom{h}{k}2\operatorname{Re}B_{t^k}(u^N_{t^{h-k}},u^N_{t^h},\tau)dt$$

$$-\sum_{k=1}^h\binom{h}{k}2\operatorname{Re}\int_0^\tau B_{t^{k+1}}(u^N_{t^{h-k}},u^N_{t^h},t)dt.$$

$$-\sum_{k=1}^h\binom{h}{k}2\operatorname{Re}B_{t^k}(u^N_{t^{h-k+1}},u^N_{t^h},t)dt \qquad (4.25)$$

Mặt khác sử dụng tích phân từng phần, điều kiện (4.2) và giả thiết $f_{t^k}(x,0)=0, 0\le k\le h-1$

ta có

$$2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau}u^N_{t^{h+2}}\overline{u^N_{t^{h+1}}}dxdt=\|u^N_{t^{h+1}}(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)} \qquad (4,26)$$

Từ (4.24)-(4.25) viết lại (4.20) như sau

$$\|u^N_{t^{h+1}}(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}+B(u^N_{t^h},u^N_{t^h},\tau)$$

$$= -(2h+1)\int_0^\tau B_t(u^N_{t^h}, u^N_{t^h}, t)dt$$

$$+\sum_{k=1}^{h}\binom{h}{k} 2\operatorname{Re} B_{t^k}(u^N_{t^{h-k}}, u^N_{t^h}, \tau)$$

$$-\sum_{k=1}^{h}\binom{h}{k} 2\operatorname{Re}\int_0^\tau B_{t^{k+1}}(u^N_{t^{h-k}}, u^N_{t^h}, t)dt$$

$$-\sum_{k=2}^{h}\binom{h}{k} 2\operatorname{Re}\int_0^\tau B_{t^k}(u^N_{t^{h-k+1}}, u^N_{t^h}, t)dt$$

$$-2\operatorname{Re}\int_{Q_\tau} f_{t^k}\overline{u^N_{t^{h+1}}}dxdt \qquad (4.27)$$

Áp dụng Bổ đề (3.1) và (4.24) sau đó sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\| u^N_{t^{h+1}}(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)} + \mu_0 \| u^N_{t^h}(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\le (2h+1)(n+1)\mu\int_0^\tau \| u^N_{t^h}\|^2_{H^1(\Omega)} dt$$

$$+\varepsilon \| u^N_{t^h}(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)} + C_{h,1}(\varepsilon)\sum_{k=0}^{h-1}\| u^N_{t^h}(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$+\varepsilon\int_0^\tau \| u^N_{t^h}\|^2_{H^1(\Omega)} + C_{h,2}(\varepsilon)\sum_{k=0}^{h-1}\int_0^\tau \| u^N_{t^h}\|^2_{H^1(\Omega)} dt$$

$$+\delta\int_0^\tau \| u^N_{t^{h+1}}\|^2_{L_2(\Omega)} dt + \frac{1}{\delta}\int_{Q_\tau} |f_{t^h}|^2 dt$$

ở đó $0 < \varepsilon < \mu_0$ và $C_{h,1}(\varepsilon), C_{h,2}(\varepsilon)$ là các hằng số dương phụ thuộc vào ε. Từ đó ta được

$$\| u^N_{t^{h+1}}(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)} + (\mu_0-\varepsilon) \| u^N_{t^h}(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\le ((2h+1)(n+1)\mu+\varepsilon)\int_0^\tau \| u^N_{t^h}\|^2_{H^1(\Omega)} dt + \delta\int_0^\tau \| u^N_{t^{h+1}}\|^2_{L_2(\Omega)} dt$$

$$+C_{h,1}(\varepsilon)\sum_{k=0}^{h-1}\| u^N_{t^h}(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)} + C_{h,2}(\varepsilon)\sum_{k=0}^{h-1}\int_0^\tau \| u^N_{t^h}\|^2_{H^1(\Omega)} dt + \frac{1}{\delta}\int_{Q_\tau} |f_{t^h}|^2 dt$$

$$= \delta\int_0^\tau (\| u^N_{t^{h+1}}\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{(2h+1)(n+1)\mu+\varepsilon}{\delta}\| u^N_{t^h}\|^2_{H^1(\Omega)})dt$$

$$+C_{h,1}(\varepsilon)\sum_{k=0}^{h-1}\| u^N_{t^h}(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)} + C_{h,2}(\varepsilon)\sum_{k=0}^{h-1}\int_0^\tau \| u^N_{t^h}\|^2_{H^1(\Omega)} dt$$

$$+\frac{1}{\delta}\int_{Q_\tau} |f_{t^h}|^2 dt \qquad (4.28)$$

Đặt $\dfrac{(2h+1)(n+1)\mu+\varepsilon}{\delta} = \mu_0 - \varepsilon$

ta có $\delta = \dfrac{(2h+1)(n+1)\mu+\varepsilon}{\mu_0-\varepsilon} = \gamma_h(\varepsilon)\cdot$

Từ đó và (4.28) ta nhận được

$$\| u^N_{t^{h+1}}(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)} + (\mu_0-\varepsilon) \| u^N_{t^h}(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\le \gamma_h(\varepsilon)\int_0^\tau (\| u^N_{t^{h+1}}\|^2_{L_2(\Omega)} + (\mu_0-\varepsilon)\| u^N_{t^h}\|^2_{H^1(\Omega)})dt$$

$$+C_{h,1}(\varepsilon)\sum_{k=0}^{h-1}\| u^N_{t^h}(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)} + C_{h,2}(\varepsilon)\sum_{k=0}^{h-1}\int_0^\tau \| u^N_{t^h}\|^2_{H^1(\Omega)} dt$$

$$+\frac{1}{\delta}\int_{Q_\tau} |f_{t^h}|^2 dt. \qquad (4.29)$$

Bây giờ bằng qui nạp ta chứng minh bất đẳng thức sau

$$\| u^N_{t^s}(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)} \le C_s(\varepsilon)e^{\gamma_s(\varepsilon)\tau}\sum_{k=0}^{s}\| f_{t^k}(.,\tau)\|^2_{L_2(\gamma_k,\Omega))}$$

(4.30)

với mọi $\gamma > \gamma_s$, $0 < \varepsilon < \mu_0$, là đúng với $s \ge 0$

Với s=0 bất đẳng thức (4.30) theo (4.14) hiển nhiên đúng.

Giả sử với $s \ge 1$ bất đẳng thức (4.30) đúng với $s-1$. Ta chứng minh nó đúng với s. Thay h=s vào (4.29) ta được

$$\| u^N_{t^{s+1}}(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)} + (\mu_0-\varepsilon) \| u^N_{t^s}(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\le \gamma_s(\varepsilon)\int_0^\tau (\| u^N_{t^{s+1}}\|^2_{L_2(\Omega)} + (\mu_0-\varepsilon)\| u^N_{t^s}\|^2_{H^1(\Omega)})dt$$

$$+C_{s,1}(\varepsilon)\sum_{k=0}^{s-1}\| u^N_{t^s}(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)} + C_{s,2}(\varepsilon)\sum_{k=0}^{s-1}\int_0^\tau \| u^N_{t^s}\|^2_{H^1(\Omega)} dt.$$

$$+\frac{1}{\delta}\int_{Q_\tau} |f_{t^s}|^2 dt$$

Với $0 < \varepsilon < \mu_0$. Do đó, sử dụng giả thiết qui nạp và $\gamma_k \le \gamma_{s-k}, (k \le s-1)$, từ bất đẳng thức trên ta có

$$\| u^N_{t^{s+1}}(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)} + (\mu_0-\varepsilon) \| u^N_{t^s}(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\le \gamma_s(\varepsilon)\int_0^\tau (\| u^N_{t^{s+1}}\|^2_{L_2(\Omega)} + (\mu_0-\varepsilon)\| u^N_{t^s}\|^2_{H^1(\Omega)})dt$$

$$+C_{s,1}(\varepsilon)\sum_{k=0}^{s-1} C_k(\varepsilon)e^{\gamma_k(\varepsilon)\tau}\sum_{j=0}^{k}\|f_{t^j}(.,\tau)\|^2_{L(\gamma_j,Q_T)}$$

$$+C_{s,2}(\varepsilon)\sum_{k=0}^{s-1}\int_0^{\tau}(C_k(\varepsilon)e^{\gamma_k(\varepsilon)t}\sum_{j=0}^{k}\|f_{t^j}(.,t)\|^2_{L(\gamma_j,Q_T)})dt$$

$$+C_{s,3}(\varepsilon)\int_0^{\tau}\|f_{t^j}\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt$$

$$\le \gamma_s(\varepsilon)\int_0^{\tau}(\|u^N_{t^{s+1}}\|^2_{L_2(\Omega)}+(\mu_0-\varepsilon)\|u^N_{t^s}\|^2_{H^1(\Omega)})dt$$

$$+C_1(\varepsilon)e^{\gamma_k(\varepsilon)\tau}\sum_{j=0}^{s-1}\|f_{t^j}(.,\tau)\|^2_{L(\gamma_j,Q_T)}$$

$$+C_2(\varepsilon)\sum_{k=0}^{s-1}\int_0^{\tau}(e^{\gamma_{s-1}(\varepsilon)t}\sum_{j=0}^{s-1}\|f_{t^j}(.,t)\|^2_{L(\gamma_j,Q_T)})dt$$

$$+C_{s,3}(\varepsilon)\int_0^{\tau}\|f_{t^j}\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt\,. \tag{4.31}$$

Đặt

$$J^N_s(t)=\|u^N_{t^{s+1}}(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}+(\mu_0-\varepsilon)\|u^N_{t^s}(x,t)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$.\ \phi(t)=C_1(\varepsilon)e^{\gamma_{s-1}(\varepsilon)t}\sum_{j=0}^{s-1}\|f_{t^j}\|^2_{L_2(\gamma_j,Q_T)}$$

$$+C_2(\varepsilon)\int_0^{\tau}(e^{\gamma_{s-1}(\varepsilon)t}\sum_{j=0}^{s-1}\|f_{t^j}\|^2_{L_2(\gamma_j,Q_T)})dt$$

$$+C_{s,3}(\varepsilon)\int_0^{\tau}\|f_{t^s}\|^2_{L_2(\Omega)}\,.$$

Từ Bất đẳng thức (4.31) ta có

$$J^N_s(\tau)\le\gamma_s(\varepsilon)\int_0^{\tau}J^N_s(t)dt+\phi(\tau)\,. \tag{4.32}$$

Áp dụng Bổ đề 3.2 vào bất đẳng thức (4.32) ta nhận được

$$J^N_s(\tau)\le e^{\gamma_s(\varepsilon)\tau}\int_0^{\tau}e^{-\gamma_s(\varepsilon)t}\phi'(t)dt\,. \tag{4.33}$$

Từ (4.33) ta có

$$\|u^N_{t^{s+1}}(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}+(\mu_0-\varepsilon)\|u^N_{t^s}(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\le C_{s,0}(\varepsilon)e^{\gamma_s(\varepsilon)\tau}\sum_{j=0}^{s}\|f_{t^j}\|^2_{L_2(\gamma_j,Q_T)}\,. \tag{4.34}$$

Từ bất đẳng thức trên ta có (4.30) đúng. Trở lại (4.29), áp dụng (4.34) với mọi $s\le h-1$, lập luận tương tự như (4.34) ta có

$$\|u^N_{t^{h+1}}(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}+(\mu_0-\varepsilon)\|u^N_{t^h}(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\le C_{s,0}(\varepsilon)e^{\gamma_h(\varepsilon)\tau}\sum_{k=0}^{h}\|f_{t^k}\|^2_{L_2(\gamma_k,Q_T)}\,.$$

Từ đó suy ra

$$\|u^N_{t^{h+1}}(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u^N_{t^h}(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\le C_{s,0}(\varepsilon)e^{\gamma_h(\varepsilon)\tau}\sum_{k=0}^{h}\|f_{t^k}\|^2_{L_2(\gamma_k,Q_T)} \tag{4.35}$$

Giả sử γ là một số dương sao cho $\gamma>\gamma_h$, thì tồn tại $\varepsilon: 0<\varepsilon<\mu_0$, sao cho

$$\gamma>\gamma_h(\varepsilon)=\frac{(2h+1)(n+1)\mu+\varepsilon}{\mu_0-\varepsilon}>\gamma_h$$

Nhân cả hai vế của (4.35) với $e^{-2\gamma t}$ sau đó lấy tích phân bất đẳng thức nhận được theo τ từ 0 đến T ta có kết quả:

$$\int_0^T(\|u^N_{t^{h+1}}(.,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u^N_{t^h}(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)})e^{\gamma_h(\varepsilon)\tau}d\tau$$

$$\le C_h(\varepsilon)e^{\gamma_h(\varepsilon)\tau}\sum_{k=0}^{h}\|f_{t^k}\|^2_{L_2(\gamma_k,Q_T)}\int_0^T e^{(\gamma_h(\varepsilon)-\gamma)\tau}d\tau$$

Vì $\gamma_h(\varepsilon)-\gamma<0$, nên tích $\int_0^T e^{(\gamma_h(\varepsilon)-\gamma)\tau}d\tau$ hội tụ. Hơn nữa, ε phụ thuộc vào γ nên từ bất đẳng thức trên ta nhận được

$$\|u_{t^h}\|^2_{H^{1,1}(e^{\gamma t},Q_T)}\le C(\gamma)\sum_{k=0}^{h}\|f_{t^k}\|^2_{L_2(\gamma_k,Q_T)}$$

ở đó $C(\gamma)$ là hằng số dương phụ thuộc vào γ.

Vì $\{u^N_{t^h}\}$ là dãy bị chặn trong $H^{1,1}(e^{\gamma t},Q_T)$ với mọi $\gamma>\gamma_h$ nên chúng ta có thể chọn ra được một dãy con hội tụ yếu tới một hàm $u^{(h)}$ trong $H^{1,1}(e^{\gamma t},Q_T)$.

Chúng ta dễ dàng thấy rằng

$$\int_{Q_T}u^N_{t^h}v\,dxdt=(-1)^h\int_{Q_T}u^N v_{t^h}dxdt,$$

Với mọi $v\in C_0^{\infty}(Q_T)$. Cho qua giới hạn khi $N\to\infty$, ta nhận được

$$\int_{Q_T} u_{t^h} v dxdt = (-1)^h \int_{Q_T} u v_{t^h} dxdt,$$

Điều này có nghĩa là u là đạo hàm suy rộng tới tận cấp h theo t và $u_{t^h} = u^{(h)}$. Hơn nữa ta có

$$\| u_{t^h} \|^2_{H^{1,1}(e^{\gamma t}, Q_T)} \leq C \sum_{k=0}^{h} \| f_{t^k} \|^2_{L_2(\gamma_k, Q_T)}$$

ở đó C là hằng số dương không phụ thuộc và N và f.

Định lý được chứng minh hoàn toàn.

5 MỘT SỐ HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP TỤC

Bài toán đã xét với hình trụ đáy chứa điểm nón dùng phương pháp nghiên cứu tương tự ta có thể trình bày bài toán cho hình trụ với đáy không trơn chẳng hạn như miền có tính chất đoạn.

Chúng ta có thể thay đổi γ_0 để được không gian nghiệm rộng hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Nguyen Manh Hung and Phung Kim Chuc (2014), "Asymptotic of solutions for second IBVP for hyperbolic systems in non-smooth domains".Vol. 93, No. 5, pp. 1010-1035. Applicable Analysis 2014.

Nguyen Manh Hung and Phung Kim Chuc (2012), "On the smoothness of the solution for the initial - Neumann problem for hyperbolic systems in Lipschitz cylinders". Vol. 16, No. 5,pp. 1629-1645,October 2012.; Taiwanese Journal of Mathematics.

Nguyen Manh Hung, Nguyen Thanh Anh and Phung Kim Chuc (2011), "On the regularity of the solution for the second initial boundary value problem for hyperbolic systems in domains with conical points", Boundary Value Problems, (doi:10.1186/1687-2770-2011-17).

Nguyen Manh Hung and Phung Kim Chuc (2010), "The smoothness with respect to time variable of the solution for the second innitial boundary problem for hyperbolic systems in infinite cylinders with non-smooth base". Vol 5. Number 2. 2010, pp. 117-134. International Journal of Evolution Equations.

M. S. Agranovich (1997), Elliptic boundary problems. in: M. S. Agranovich. Yu. V. Egrov, M. A. Shubin (Eds.) Partial Differential Equations,IX, of Encyclopaedia Math. Sci. Springer, Berlin 79 , pp. 1144.

N. M. Hung (1989), "”On the smoothness of solution of the mixed boundary value problem for the second order hyperbolic equation in a neighbourhood of an edge", Acta. Math. Viet., 14(2), pp. 99 - 113.

M. Dauge (1988), Elliptic boundary value problems on corner domains, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin.

D. Ginbarg and N. Trudinger (1983), Elliptic partial differential equation of second order, Springer -Verlag, Berlin - New York.

R. A. Adams (1975), Sobolev spaces, Academic Press.