Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
website: sj.ctu.edu.vn

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG NGẪU NHIÊN VÀ ÁP DỤNG

Nguyễn Xuân Hải[1] và Nguyễn Hồng Quân[2]

[1]*Khoa Khoa học tự nhiên, Đại học Thủ Dầu Một*
[2]*Khoa Cơ bản 2, Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông cơ sở tại thành phố Hồ Chí Minh*

Thông tin chung:
Ngày nhận: 31/08/2015
Ngày chấp nhận: 25/02/2016

Title:
Stability of stochastic equilibrium problems and application

Từ khóa:
Cân bằng ngẫu nhiên, Tính ổn định, Mêtric xác suất, Tối ưu ngẫu nhiên, Ánh xạ nghiệm

Keywords:
Stochastic equilibria, Stability, Probability metric, Stochastic optimization, Solution mapping

ABSTRACT

In this paper, we propose a stochastic equilibrium problem involving parameter of probability measure (SEP). By introducing some probability metrics, we establish sufficient conditions for the solution map of (SEP) to be upper semicontinuous. Applications to stochastic programming problems are given.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một bài toán cân bằng ngẫu nhiên phụ thuộc tham số độ đo xác suất (SEP). Bằng việc đề nghị vài mêtric xác suất trên không gian các tham số, chúng tôi xét tính ổn định cho (SEP). Kết quả sau đó được áp dụng cho một số trường hợp riêng của (SEP).

Trích dẫn: Nguyễn Xuân Hải và Nguyễn Hồng Quân, 2016. Tính ổn định của bài toán cân bằng ngẫu nhiên và áp dụng. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 42a: 97-103.

1 GIỚI THIỆU VÀ TỔNG QUAN

Gọi $X \subset \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^s$ và $\wp(\Omega)$ là tập tất cả các độ đo xác suất Borel trên Ω. Gọi $K: X \times \wp(\Omega) \multimap X$ là một ánh xạ đa trị và $f: \Omega \times X \times X \to \overline{\mathbb{R}} \cup \{\pm\infty\}$ sao cho, với mỗi $x, y \in X, f(.,x,y)$ là hàm đo được. Trong bài báo này chúng tôi xét bài toán cân bằng ngẫu nhiên phụ thuộc tham số độ đo xác suất dưới đây:

(SEP) Tìm $\overline{x} \in X$ sao cho $\overline{x} \in K(\overline{x}, \mu)$ và $\mathrm{E}_\mu f(\omega, \overline{x}, \mu) \le 0$ với mọi $y \in K(\overline{x}, \mu)$, ở đây $\mathrm{E}_\mu f(\omega, x, y) = \int_\Omega f(\omega, x, y)\mu(d\omega)$ là giá trị kì vọng của $f(.,x,y)$ theo độ đo μ. Khi $K(x,\mu) := K(\mu)$ và $f(\omega,x,y) = F(\omega,x) - F(\omega,y)$, ở đây hàm $F: \Omega \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ sao cho $F(.,x)$ là đo được với mọi $x \in X$, thì bài toán (SEP) qui về bài toán tối ưu ngẫu nhiên phụ thuộc tham số độ đo xác suất sau:

(SOP)

$$\min_{x \in K(\mu)} \mathrm{E}_\mu F(\omega, y) = \min_{x \in K(\mu)} \int_\Omega F(\omega, x)\mu(d\omega) .$$

Thêm vào đó, gọi $f_i: \Omega \times X \to \overline{\mathbb{R}}, i = 1,2,...,d$, với $f_i(.,x)$ là đo được cho mỗi $x \in X$, và K xác định bởi $K(\mu) = \{x \in X: \int_\Omega f_i(\omega,x)\mu(d\omega)\}$, khi đó (SEP) trở thành bài toán được xét trong (Rachev, S.

T. and W. Romisch, 2002). Với bài toán (SEP), định nghĩa như sau:

$$S(\mu)=\{x\in X: x\in K(x,\mu), \int_{\Omega} f\left(\omega,x,y\right)\mu(d\omega) \le 0, \forall y\in K(x,\mu)\}. \quad (1)$$

Khi đó S xác định một ánh xạ đa trị từ $\wp(\Omega)$ vào X và được gọi là ánh xạ nghiệm của bài toán (SEP). Tính ổn định của ánh xạ nghiệm của bài toán tối ưu ngẫu nhiên đã được xét trong nhiều bài báo

(Cho, G.M., 1995; Henrion, R. and W. Romisch, 1999; Nemirovski, A. *et al.*, 2009; Rachev, S. T. and W. Romisch, 2002; Romisch, W. and R. J-B. Wets, 2007; Shapiro, A., 2008).

Gọi *X, Y* là các không gian mêtric và $H: X \multimap Y$ là một hàm đa trị. *H* được gọi là đóng nếu đồ thị Graph $H=\{(x,y)\in X\times Y: y\in H(x)\}$ của *H* là một tập đóng trong $X\times Y$. *H* được gọi là nửa liên tục dưới (lsc) tại x_o, nếu và chỉ nếu, $H(x_o)\cap U\neq\emptyset$ với tập mở $U\subset Y$ nào đó, thì tồn tại một lân cận mở *N* của x_o sao cho : $\forall x\in N, H\left(x\right)\cap U\neq\emptyset$. *H* gọi là nửa lên tục trên (usc) tại x_o nếu và chỉ nếu với mỗi tập mở $U\supset H\left(x_0\right)$ tồn tại một lân cận *N* của x_o sao cho $U\supset H(N)$. *H* gọi là liên tục tại x_o nếu và chỉ nếu nó vừa usc vừa lsc tại x_o. Ta nói rằng *H* là lsc (usc, liên tục) nếu nó là lsc (usc, liên tục) tại mọi điểm của *X*. Ta dùng *d*(. , .) để kí hiệu mêtric trên không gian mêtric *X*. Với $x\in X$ và $A\subset X$ ta kí hiệu:

$d(x,A)=\inf_{y\in A} d(x,y)$ và $B(A,r)=\{x\in X \mid d(x,A)<r\}$

Khi đó nếu *H* có các ảnh compact thì *H* là usc tại x_o nếu và chỉ nếu với mỗi số dương $r>0$ tồn tại số dương $\delta>0$ sao cho $H(B(x_o,\delta))\le B(H(x_o),r)$. Khi *Y* là không gian mêtric tuyến tính, *H* là nửa liên tục trên Hausdorff (nửa liên tục dưới Hausdorff) nếu và chỉ nếu với mỗi lân cận *B* của gốc trong *Y*, tồn tại lân cận *N* của x_o sao cho $H(x)\subset H(x_o)+B$ $(H(x_0)\subset H(x)+B)$ với mọi $x\in N$. Ta cũng có tính chất là nếu *H* là ánh xạ đóng và có các ảnh là compact thì *H* là ánh xạ usc.

Tính nửa liên tục trên (dưới) Hausdorff là yếu (mạnh) hơn tính nửa liên tục trên, nhưng chúng là tương đương khi các ảnh của ánh xạ *H* là compact. *H* được gọi là liên tục Hausdorff tại x_o nếu nó vừa nửa liên tục trên Hausdorff tại x_o vừa nửa liên tục dưới Hausdorff tại x_o. Tính liên tục Hausdorff thường được diễn tả theo thuật ngữ của mêtric Hausdorff như sau: Với A và B là các tập con đóng của không gian metric X, khoảng cách Hausdorff $h(A,B)=max\left\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{y\in B} d(y,A)\right\}$ là một metric, và *H* là liên tục Hausdorff tại x_o nếu và chỉ nếu $h\left(H(x),H(x_o)\right)\to 0$ khi $x\to 0$.

Một ánh xạ đơn trị $h: X\to\mathbb{R}$ gọi là nửa liên tục trên (nửa liên tục dưới) nếu với mọi $\alpha\in\mathbb{R}$ tập mức trên $\left\{x\in X \mid h(x)\ge\alpha\right\}$ $\left(\left\{x\in X \mid h(x)\le\alpha\right\}\right)$ là đóng trong *X*.

Gọi Ω là tập con đóng của $\mathbb{R}^n$ và μ là độ đo xác suất Borel trên Ω. Một hàm $f: \Omega\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ gọi là khả tích chuẩn nếu ánh xạ

$$\omega\to \operatorname{epi} f(\omega,.) := \left\{(x,r)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R} \mid f(\omega,x)\le r\right\}$$

là có các ảnh đóng và đo được. Nếu f là khả tích chuẩn thì $f(\omega,.)$ là nửa liên tục dưới cho mỗi $\omega\in\Omega$, và $f(.,x)$ là đo được cho mỗi $x\in\mathbb{R}^m$.

2 CÁC MÊTRIC XÁC SUẤT CHO (SEP)

Nhiều mêtric xác suất đã được đưa ra bởi nhiều tác giả nhằm nghiên cứu các bài toán ngẫu nhiên khác nhau (xem Rachev, S. T., 1991). Trong mục này, chúng tôi giới thiệu vài mêtric và xây dựng các không gian tham số độ đo xác suất để nghiên cứu bài toán (SEP).

Với $p\ge 1$, đặt $\wp_p(\Omega):=\{\mu\in\wp(\Omega): \int_{\Omega}\|\omega\|^p\mu(d\omega)<\infty\}$.

Nhắc lại rằng, trên $\wp_p(\Omega)$, mêtric Fortet-Mourier (xem Rachev, S. T., 1991) được xác định bởi: với mọi $\mu,\nu\in\wp_p(\Omega)$,

$$\zeta_p(\mu,\nu)=\sup_{g\in\mathfrak{M}_p(\Omega)}\left|\int_{\Omega} g(\omega)(\mu-\nu)(d\omega)\right|,$$

ở đây

$$\mathfrak{M}_p(\Omega) = \{g:\Omega \to \mathbb{R}: \left|g(\omega) - g(\overline{\omega})\right| \leq \left\|\omega - \overline{\omega}\right\| \max\{1, \|\omega\|^{p-1}, \|\overline{\omega}\|^{p-1}\}, \forall \omega, \overline{\omega} \in \Omega\}$$

Với các dữ kiện của bài toán (SEP), ta đặt $\Gamma(\mu, y) = \{x \in X: \int_\Omega f(\omega, x, y)\mu(d\omega) \leq 0\}$, và định nghĩa khoảng cách ρ và σ_p tương ứng trên $\wp(\Omega)$ và $\wp_p(\Omega)$ như sau:

$\forall \mu, \nu \in \wp(\Omega)$,

$$\rho(\mu, \nu) = \sup_{x \in X} h(K(x, \mu), K(x, \nu)) + \sup_{y \in X} h(\Gamma(\mu, y), \Gamma(\nu, y));$$

$\forall \mu, \nu \in \wp_p(\Omega)$,

$$\rho_p(\mu, \nu) = \sup_{x \in X} h(K(x, \mu), K(x, \nu)) + \sup_{g \in \mathfrak{M}_p(\Omega)} \left|\int_\Omega g(\omega)(\mu - \nu)(d\omega)\right|,$$

ở đây *h* là khoảng cách Hausdorff xác định trên lớp tất cả các tập con của *X*.

Bổ đề 2.1 Với mỗi $\omega \in \Omega$ và $y \in X$, nếu $f(\omega, ., y)$ là lsc thì $\Gamma(\mu, y)$ là tập đóng trong X với mọi $\mu \in \wp(\Omega)$.

Chứng minh. Lấy bất kỳ dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma(\mu, y)$ sao cho $x_n \to x \in X$, theo bổ đề Fatou,

$$\int_\Omega f(\omega, x, y)\mu(d\omega) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f(\omega, x_n, y)\mu(d\omega) \leq 0.$$

Do đó $x \in \Gamma(\mu, y)$. Vậy $\Gamma(\mu, y)$ là tập đóng.

Từ bây giờ trở đi, với bài toán (SEP) ta luôn giả thiết thêm X là tập con compact của $\mathbb{R}^n$, ánh xạ đa trị *K* có các ảnh đóng, và $f(\omega, ., y)$ là lsc với mọi $(\omega, y) \in \Omega \times X$. Với các giả thiết này, các khoảng cách ρ và σ_p tương ứng trở thành các mêtric trên $\wp(\Omega)$ và $\wp_p(\Omega)$, và như vậy các không gian tham số độ đo xác suất $(\wp(\Omega), \rho)$ và $(\wp_p(\Omega), \rho_p)$ là các không gian mêtric. Sau này, khi xét cho $(\wp(\Omega), \rho)$ (tương ứng, $(\wp_p(\Omega), \rho_p)$) thì ta luôn giả thiết ánh xạ *K* từ $X \times \wp(\Omega)$ (tương ứng, $X \times \wp_p(\Omega)$) vào *X*. Trong trường hợp $K: X \times \wp_p(\Omega) \multimap X$ được xác định bởi

$$K(x, \mu) := K(\mu) = \{x' \in X: \int_\Omega m_i(\omega, x')\mu(d\omega) \leq 0, i = 1, 2, ..., l\}, \tag{2}$$

ở đây $m_i: \Omega \times X \to \mathbb{R}$ thỏa mãn với mỗi $x \in X$, $m_i(., x) \in \mathfrak{M}_p(\Omega)$, và với mỗi $\omega \in \Omega, m_i(\omega, .)$ là lsc. Thế thì *K* không phụ thuộc vào *x*, và ta xem *K* như là ánh xạ từ $\wp_p(\Omega)$ vào *X*. Trong trường hợp này, dùng bổ đề Fatou ta dễ dàng thấy rằng *K* luôn có các ảnh đóng.

Bổ đề 2.2 Với không gian $(\wp(\Omega), \rho)$, nếu ánh xạ $K: X \times \wp(\Omega) \multimap X$ là liên tục theo biến thứ nhất thì nó là ánh xạ đóng và nửa liên tục dưới.

Chứng minh. Gọi $\{((x_n, \mu_n), y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset$ Graph*K* là một dãy bất kỳ sao cho $((x_n, \mu_n), y_n) \to ((x, \mu), y)$. Ta có:

$$h(K(x_n, \mu_n), K(x, \mu)) \leq h(K(x_n, \mu_n), K(x_n, \mu)) + h(K(x_n, \mu), K(x, \mu))$$

$$\leq \sup_{x' \in X} h(K(x', \mu_n), K(x', \mu)) + h(K(x_n, \mu), K(x, \mu)) \leq \rho(\mu_n, \mu) + h(K(x_n, \mu), K(x, \mu)).$$

Khi $\mu_n \to \mu$ trong $(\wp(\Omega), \rho)$ và $x_n \to x$ trong *X* ta có: $\rho(\mu_n, \mu) \to 0$ và $h(K(x_n, \mu), K(x, \mu)) \to 0$. Do đó $h(K(x_n, \mu_n), K(x, \mu)) \to 0$. Bây giờ

$$d(y, K(x, \mu)) = \inf_{z \in K(x, \mu)} \|y - z\| \leq \|y_n - y\| + h(K(x_n, \mu), K(x, \mu)) \to 0.$$

Suy ra $d(y, K(x, \mu)) = 0$. Vì $K(x, \mu)$ là tập đóng trong *X*, $y \in K(x, \mu)$. Vậy *K* là ánh xạ đóng. Ta chứng minh *K* nửa liên tục dưới. Lấy bất kì dãy $\{(x_n, \mu_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset X \times (\wp(\Omega), \rho)$ hội tụ đến (x, μ), và lấy bất kì $y \in K(x, \mu)$. Với mỗi *n*, do $K(x_n, \mu_n)$ là tập đóng nên tồn tại $y_n \in K(x_n, \mu_n)$ sao cho $\|y_n - y\| = d(y, K(x_n, \mu_n))$. Khi đó ta có :

$$\|y_n - y\| = d(y, K(x_n, \mu_n)) \leq \sup_{y' \in K(x, \mu)} d(y', K(x_n, \mu_n)) \leq h(K(x_n, \mu_n), K(x, \mu)) \leq \rho(\mu_n, \mu) \to 0,$$

nghĩa là $y_n \to y$. Vậy K là nửa liên tục dưới.

Chứng minh tương tự như của Bổ đề 2.2 ta có bổ đề sau.

Bổ đề 2.3 Với không gian $(\wp_p(\Omega),\sigma_p)$, nếu ánh xạ $K: X\times\wp_p(\Omega)\multimap X$ là liên tục theo biến thứ nhất thì nó là ánh xạ đóng và nửa liên tục dưới.

Bổ đề 2.4 Với không gian $(\wp_p(\Omega),\zeta_p)$, ánh xạ $K:\wp_p(\Omega)\multimap X$ được xác định bởi (2) là đóng, và do K có các ảnh đóng nên K là nửa liên tục trên.

Chứng minh. Lấy bất kì dãy $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đến μ trong $(\wp_p(\Omega),\zeta_p)$, và gọi $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy bất kì trong X sao cho với mọi $n, y_n\in K(\mu_n)$, và $y_n\to y$. Do bổ đề Fatou, với mọi $i=1,2,...,l$, ta có

$$\int_\Omega m_i(\omega,y)\mu(d\omega)\le\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega m_i(\omega,y_n)\mu(d\omega)\le\liminf_{n\to\infty}\left[\left|\int_\Omega m_i(\omega,y_n)(\mu_n-\mu)(d\omega)\right|+\int_\Omega m_i(\omega,y_n)\mu_n(d\omega)\right]$$
$$\le\liminf_{n\to\infty}\left[\sup_{g\in\mathfrak{M}_p(\Omega)}\left|\int_\Omega g(\omega)(\mu_n-\mu)(d\omega)\right|+\int_\Omega m_i(\omega,y_n)\mu_n(d\omega)\right]$$
$$\le\liminf_{n\to\infty}\left[\zeta_p(\mu_n,\mu)+\int_\Omega m_i(\omega,y_n)\mu_n(d\omega)\right]=\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega m_i(\omega,y_n)\mu_n(d\omega)\le 0.$$

Vậy $y\in K(\mu)$, tức là *K* là đóng.

3 TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA (SEP)

Đầu tiên ta có kết quả sau về tính chất tôpô của tập nghiệm.

Mệnh đề 3.1 Cho $\mu\in\wp(\Omega)$, giả sử tập là $E_\mu:=\{x\in X: x\in K(x,\mu)\}$ đóng và $K(.,\mu)$ là lsc và với mỗi $\omega\in\Omega$, $f(\omega,.,.)$ là lsc. Khi đó tập nghiệm $S(\mu)$ được xác định bởi (1) là đóng.

Chứng minh. Giả sử $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(\mu)$ là một dãy bất kì sao cho $x_n\to x$. Ta chứng tỏ $x\in S(\mu)$. Bởi công thức (1), với mọi $n, x_n\in E_\mu$. Vì E_μ đóng, ta có $x\in E_\mu$, nghĩa là $x\in K(x,\mu)$. Bây giờ lấy bất kì $y\in K(x,\mu)$. Vì $K(.,\mu)$ là lsc, tồn tại dãy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ với $y_n\in K(x_n,\mu)$ sao cho $y_n\to y$. Từ tính nửa liên tục dưới của $f(\omega,.,.)$ và bổ đề Fatou ta có:

$$\int_\Omega f(\omega,x,y)\mu(d\omega)\le\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f(\omega,x_n,y_n)\mu_n(d\omega)\le 0.$$

Vậy $x\in S(\mu)$.

Từ đây trở đi, với bài toán (SEP) ta luôn giả sử tất cả các điều kiện trong định nghĩa của bài toán, các điều kiện nói đến trong Mục 2 và các Bổ đề 2.2-2.3 luôn được thỏa mãn. Ta giả thiết thêm rằng, với mỗi $\omega\in\Omega$, $f(\omega,.,.)$ là liên tục.

Định lí 3.1 Với ánh xạ $K: X\times(\wp(\Omega),\rho)\multimap X$, ánh xạ nghiệm S được xác định bởi công thức (1), từ $(\wp(\Omega),\rho)$ vào X là nửa liên tục trên.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $\mu_0\in\wp(\Omega)$ sao cho *S* không usc tại μ_o. Khi đó tồn tại lân cận mở *U* của $S(\mu_0)$ trong *X* và tồn tại các dãy $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty},\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa: $\mu_n\to\mu_0$ và với mọi $n, x_n\in S(\mu_n)$ nhưng $x_n\notin U$. Ta có:

$$h\big(K(x_n,\mu_n),K(x_n,\mu_0)\big)\le$$
$$\sup_{x\in X}h\big(K(x,\mu_n),K(x,\mu_0)\big)$$
$$\le\rho(\mu_n,\mu_0)\to 0.$$

Suy ra, với mọi *n*, tồn tại $x_n^*\in K(x_n,\mu_0)$ sao cho $\|x_n-x_n^*\|\to 0$. Vì *X* là compact, do đó ta có thể giả sử $x_n^*\to x_0$. Khi đó $x_n\to x_0$. Do Bổ đề 2.2, ánh xạ *K* là đóng. Hơn nữa, với mọi $n, x_n\in K(x_n,\mu_n)$. Suy ra $x_0\in K(x_0,\mu_0)$. Bây giờ giả sử tồn tại $y_0\in K(x_0,\mu_0)$ sao cho

$$x_0\notin\Gamma(\mu_0,y_0)=\left\{x\in X:\int_\Omega f(\omega,x,y_0)\mu_0(d\omega)\le 0\right\}.$$

Đặt $\varepsilon=\frac{1}{2}d\big(x_0,\Gamma(\mu_0,y_0)\big)$. Vì *K* là lsc (Bổ đề 2.2), tồn tại dãy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ với $y_n\in K(x_n,\mu_n)$ cho mọi *n*, và $y_n\to y_0$. Hơn nữa, $\Gamma(\mu_0,.)$ là liên tục (do $f(\omega,x,.)$ liên tục). Vì vậy ta có:

$$h\left(\Gamma(\mu_n, y_n), \Gamma(\mu_0, y_0)\right)$$
$$\le h\left(\Gamma(\mu_n, y_n), \Gamma(\mu_0, y_n)\right) + h\left(\Gamma(\mu_0, y_n), \Gamma(\mu_0, y_0)\right)$$
$$\le \sup_{y\in X}\left(h\left(\Gamma(\mu_n, y), \Gamma(\mu_0, y)\right) + h\left(\Gamma(\mu_0, y_n), \Gamma(\mu_0, y_0)\right)\right)$$
$$\le \rho(\mu_n, \mu_0) + h\left(\Gamma(\mu_0, y_n), \Gamma(\mu_0, y_0)\right) \to 0.$$

Nhưng khi $h\left(\Gamma(\mu_n, y_n), \Gamma(\mu_0, y_0)\right) \to 0$ ta có $x_n \in h\left(\Gamma(\mu_n, y_n) \subset B(\Gamma(\mu_0, y_0), \varepsilon\right)$ với n đủ lớn. Điều này mâu thuẫn với $x_n \to x_0$. Vậy $x_0 \in \Gamma(\mu_0, y)$ với mọi $y \in K(x_0, \mu_0)$. Do đó $x_0 \in S(\mu_0) \subset U$. Điều này mâu thuẫn với $x_n \to x_0$ và giả thuyết $x_n \notin U$ với mọi *n*. Vậy *S* là usc.

Định lí 3.2 Với ánh xạ $K : X \times (\wp_p(\Omega), \sigma_p) \multimap X$, giả sử với mọi $\omega, \overline{\omega} \in \Omega$ và với mọi $x, y \in X, f(\omega,.,.)$ là nửa liên tục dưới, và

$$\left|f(\omega,x,y) - f(\overline{\omega},x,y)\right| \le \left\|\omega - \overline{\omega}\right\| \max\{1, \left\|\omega\right\|^{p-1}, \left\|\overline{\omega}\right\|^{p-1}\}. \quad (3)$$

Khi đó ánh xạ nghiệm S được xác định bởi công thức (1), từ $\left(\wp_p(\Omega), \sigma_p\right)$ vào X, là nửa liên tục trên.

Chứng minh. Giả sử *S* không usc tại $\mu_0 \in \wp_p(\Omega)$. Thế thì tồn tại một lân cận mở *U* của $S(\mu_0)$ và các dãy $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn: $\mu_n \to \mu_0$ và với mọi $n, x_n \in S(\mu_n)$ nhưng $x_n \notin U$. Lý luận tương tự như phần đầu trong chứng minh định lí 3.1 ta có thể giả sử $x_n \to x_0 \in K(x_0, \mu_0)$. Bây giờ ta chứng minh

$$\forall y \in K(x_0, \mu_0), \quad \int_\Omega f(\omega, x_0, y)\mu_0(d\omega) \le 0. \quad (4)$$

Thật vậy, vì K là lsc (Bổ đề 2.3) với bất kỳ $y \in K(x_0, \mu_0)$, tồn tại dãy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ với $y_n \in K(x_n, \mu_n)$ với mọi *n*, và $y_n \to y$. Do (3), với mọi $x, y \in X, f(., x, y) \in \mathfrak{M}_p(\Omega)$. Điều này cùng với tính nửa liên tục dưới của $f(\omega,.,.)$ và bổ đề Fatou ta có

$$\int_\Omega f(\omega, x_0, y)\mu_0(d\omega) \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f(\omega, x_n, y_n)\mu_0(d\omega)$$
$$= \liminf_{n\to\infty}\left[\int_\Omega f(\omega, x_n, y_n)(-\mu_n + \mu_0)(d\omega) + \int_\Omega f(\omega, x_n, y_n)\mu_n(d\omega)\right]$$
$$\le \liminf_{n\to\infty}\left[\left|\int_\Omega f(\omega, x_n, y_n)(\mu_n - \mu_0)(d\omega)\right| + \int_\Omega f(\omega, x_n, y_n)\mu_n(d\omega)\right]$$
$$\le \liminf_{n\to\infty}\left[\sup_{g\in\mathfrak{M}_p(\Omega)}\left|\int_\Omega g(\omega)(\mu_n - \mu_0)(d\omega)\right| + \int_\Omega f(\omega, x_n, y_n)\mu_n(d\omega)\right]$$
$$\le \liminf_{n\to\infty}\left[\sigma_p(\mu_n, \mu_0) + \int_\Omega f(\omega, x_n, y_n)\mu_n(d\omega)\right]$$
$$= \liminf_{n\to\infty}\left[\int_\Omega f(\omega, x_n, y_n)\mu_n(d\omega)\right] \le 0.$$

Vậy (4) đúng. Do đó, $x_0 \in S(\mu_0)$ và như vậy $x_0 \in U$, mâu thuẫn với $x_n \to x_0$ và $x_n \notin U$ với mọi *n*.

Trong trường hợp $K : X \times (\wp_p(\Omega), \zeta_p) \multimap X$ được xác định bởi (2) ta có kết quả sau.

Định lí 3.3 Nếu ánh xạ đa trị $T : X \times (\wp_p(\Omega), \zeta_p) \multimap X$ được xác định bởi

$$T(\mu) = \{x \in X : x \in K(\mu), \int_\Omega f(\omega, x, y)\mu(d\omega) \le 0\}$$

là đóng, thì ánh xạ nghiệm S được xác định bởi công thức (1), từ $\left(\wp_p(\Omega), \zeta_p\right)$ vào X, là nửa liên tục trên.

Chứng minh. Từ các điều kiện của Định lí 3.3 ta thấy các điều kiện trong Mệnh đề 3.1 thỏa mãn. Do đó, theo Mệnh đề 3.1, ánh xạ nghiệm *S* có các ảnh đóng trong tập compact *X*. Ta có, với mọi $\mu \in \wp_p(\Omega)$,

$$S(\mu)=K(\mu)\cap\{x\in X:\forall y\in K(\mu),\int_\Omega f\left(\omega,x,y\right)\mu(d\omega)\leq 0\} \tag{5}$$
$$=K(\mu)\cap T(\mu).$$

Vì K là ánh xạ đóng (do Bổ đề 2.4) và T là đóng nên từ (5) suy ra S cũng là ánh xạ đóng. Hơn nữa S có các ảnh compact nên suy ra nó là usc.

Nhận xét 3.1 Dùng bổ đề Fatou ta dễ dàng chứng minh được ánh xạ T trong Định lí 3.3 là đóng nếu K là liên tục và với mỗi $\omega\in\Omega, f(\omega,.,.)$ là nửa liên tục dưới.

4 ÁP DỤNG

4.1 Bài toán (SOP)

Với bài toán (SOP) (xem Mục 1) ta luôn giả thiết các điều kiện trong định nghĩa của bài toán được thỏa mãn và ánh xạ K có các ảnh đóng. Trên $\wp_p(\Omega)$ ta định nghĩa mêtric $\sigma_p^{'}$ như sau: với mọi $\forall\mu,\nu\in\wp(\Omega)$,

$$\sigma_p^{'}(\mu,\nu)=\max\left\{h(K(\mu),K(\nu)),\ \sup_{g\in\mathfrak{M}_p(\Omega)}\left|\int_\Omega g(\omega)(\mu-\nu)(d\omega)\right|\right\}.$$

Rõ ràng, với mọi $\forall\mu,\nu\in\wp(\Omega)$, $\sigma_p^{'}(\mu,\nu)\leq\sigma_p(\mu,\nu)$. Giá trị tối ưu của bài toán (SOP) tại tham số μ là

$$\vartheta(\mu)=\min_{x\in K(\mu)}\int_\Omega F(\omega,x)\,\mu(d\omega)\ .$$

Hệ quả 4.1 (a) Với ánh xạ, giả sử với mọi $\omega,\overline{\omega}\in\Omega$ và với mọi $x\in X, F(\omega,.)$ là liên tục dưới, và

$$\left|F(\omega,x)-f(\overline{\omega},x)\right|\leq\frac{1}{2}\left\|\omega-\overline{\omega}\right\|\max\{1,\left\|\omega\right\|^{p-1},\left\|\overline{\omega}\right\|^{p-1}\}, \tag{6}$$

thế thì ánh xạ nghiệm $S:(\wp_p(\Omega),\sigma_p)\multimap X$ của (SOP), mà được xác định bởi (7), là nửa liên tục trên.

$$S(\mu)=\left\{x\in K(\mu):\min_{x\in K(\mu)}\int_\Omega F(\omega,x)\,\mu(d\omega)=\vartheta(\mu)\right\}. \tag{7}$$

Với $K:X\times(\wp_p(\Omega),\sigma_p^{'})\multimap X$, giả sử các điều kiện trong (a) thỏa, thế thì ánh xạ nghiệm S xác định bởi (7), từ $\left(\wp_p(\Omega),\sigma_p^{'}\right)$ vào X, là nửa liên tục trên. Hơn nữa, $\forall\mu,\nu\in\wp_p(\Omega)$ ta có $\left|\vartheta(\mu)-\vartheta(\nu)\right|\leq\sigma_p^{'}(\mu,\nu)$.

Chứng minh. (a) Áp dụng Định lí 3.2 với $K(x,\mu):=K(\mu)$ và $f(\omega,x,y):=F(\omega,x)-F(\omega,y)$.

(b) Tính nửa liên tục trên của ánh xạ S được chứng minh tương tự như chứng minh của Định lí 3.2. Bây giờ, với mọi $\mu,\nu\in\wp_p(\Omega)$, lấy $x^{'}\in S(\mu)$ và $x^{''}\in S(\nu)$ ta có:

$$\left|\vartheta(\mu)-\vartheta(\nu)\right|\leq\max\left\{\int_\Omega F(\omega,x^{'})(\mu-\nu)(d\omega),\int_\Omega F(\omega,x^{'})(\nu-\mu)(d\omega)\right\}\leq\sup_{g\in\mathfrak{M}_p(\Omega)}\left|\int_\Omega g(\omega)(\mu-\nu)(d\omega)\right|$$
$$\leq\max\left\{h(K(\mu),K(\nu)),\ \sup_{g\in\mathfrak{M}_p(\Omega)}\int_\Omega g(\omega)(\mu-\nu)(d\omega)\right\}=\sigma_p^{'}(\mu,\nu).$$

4.2 Bài toán tối ưu với ràng buộc ngẫu nhiên

Gọi X là tập con lồi, đóng, bị chặn của $\mathbb{R}^n$, Ω như trong Mục 1. Gọi $g:X\to\mathbb{R}^n, k:=(k_1,k_2,...,k_m):X\to\mathbb{R}^m$ là hàm liên tục, và $\xi:\Omega\to\mathbb{R}^m$ là vectơ ngẫu nhiên m chiều. Xét bài toán tối ưu với ràng buộc ngẫu nhiên (OP) $\min\{g(x):x\in X,\mu(\omega\in\Omega:k(x)\geq\xi(\omega))\geq r\}$.

(OP) là trường hợp riêng của (SEP) với $f(\omega,x,y):=g(x)$ và $K(\mu):=\{x\in X:\mu(\omega\in\Omega:k(x)\geq\xi(\omega))\geq r\}$. Đặt $\Gamma_\mu(k(x))=\mu(\omega\in\Omega:k(x)\geq\xi(\omega))$. Vì k liên tục, $K(\mu)=\{x\in X:\Gamma_\mu(k(x))\geq r\}$ là đóng. Do đó, khoảng cách $\rho^{'}$ xác định trên $\wp(\Omega)$, xác định bởi: với mọi $\forall\mu,\nu\in\wp(\Omega)$, $\rho^{'}(\mu,\nu)=h(K(\mu),K(\nu))$ là một mêtric.

Hệ quả 4.2 Ánh xạ nghiệm $S(\mu)=\arg\min\{g(x):x\in X,\Gamma_\mu(\mathrm{h(x)})\geq\mathrm{r}\}$ là nửa liên tục trên trong $(\wp(\Omega),\rho^{'})$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Cho, G.M., 1995. Stability of the Multiple Objective Linear Stochastic Programming Problems. Bulletin of the Korean Mathematical Society. 32: 287-296.

Henrion, R. and W. Romisch, 1999. Metric Regular and Quantitative Stability in Stochastic Programs with Probabilistic Constraints. Mathematical Programming. 84: 55-88.

Nemirovski, A. et al., 2009. Robust Stochastic Approximation Approach to Stochastic Programming. SIAM Journal on Optimization. 19: 1574-1609.

Rachev, S. T., 1991. Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models. Wiley, Chichester, U.K. 493pp.

Rachev, S. T. and W. Romisch, 2002. Quatitative Stability in Stochastic Programming the Mathod of Probability Metrics. Mathematics of Operation Reseach. 27: 792-818.

Romisch, W. and R. J-B. Wets, 2007. Stability of ε-Approximate Solutions to Convex Stochastic Programs. SIAM Journal on Optimization. 18(3): 961–979.

Shapiro, A., 2008. Stochastic Programming Approach to Optimization under Uncertainty. Mathematical Programming. 112(B): 183-220.