Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2020.112

TÍNH NỬA LIÊN TỤC TRÊN CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM BÀI TOÁN CÂN BẰNG VỚI RÀNG BUỘC CÂN BẰNG

Lâm Quốc Anh[1*], Trần Ngọc Tâm[2], Trần Thị Thùy Dương[1], Lâm Văn Đầy[3] và Nguyễn Ngọc Giang[4]

[1]*Bộ môn Toán, Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*

[2]*Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*

[3]*Bộ môn Toán, Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Nam Cần Thơ*

[4]*Bộ môn Toán kinh tế, Trường Đại học Ngân hàng Tp. HCM*

**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Lâm Quốc Anh (email: quocanh@ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 14/05/2020
Ngày nhận bài sửa: 12/06/2020
Ngày duyệt đăng: 28/10/2020

Title:
Upper semicontinuity of solution maps to equilibrium problems with equilibrium constraints

Từ khóa:
Bài toán cân bằng hai mức, tính đóng theo mức, tính nửa liên tục, tính lồi tổng quát

Keywords:
Bilevel equilibrium problem, generalized convexity, level closedness, semicontinuity

ABSTRACT

The paper is to investigate vector equilibrium problems with equilibrium constraints in Hausdorff topological vector spaces ordered by cones. By using relaxation of semicontinuity and generalized convexity properties of vector-valued maps, sufficient conditions for upper semicontinuity of solution maps to the reference problems are established, and many counterexamples are also provided to illustrate the essentialness of these conditions. The approaches and results obtained in this paper are new even for the scalar problems.

TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu các bài toán cân bằng với các ràng buộc cân bằng trong không gian véc tơ tô pô Hausdorff được sắp thứ tự theo nón. Bằng cách sử dụng các tính nửa liên tục giảm nhẹ và các tính lồi suy rộng của hàm giá trị véc tơ, các điều kiện đủ cho tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm các bài toán đang xét được thiết lập, và đồng thời các phản thí dụ để minh hoạ cho tính thiết yếu của các điều kiện này cũng được đưa ra. Cách tiếp cận và kết quả đạt được trong bài báo này là mới, ngay cả cho trường hợp bài toán vô hướng.

Trích dẫn: Lâm Quốc Anh, Trần Ngọc Tâm, Trần Thị Thùy Dương, Lâm Văn Đầy và Nguyễn Ngọc Giang, 2020. Tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm bài toán cân bằng với ràng buộc cân bằng. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 56(5A): 60-64.

1 GIỚI THIỆU

Bài toán cân bằng véc tơ là một mô hình hợp nhất của rất nhiều bài toán quan trọng trong tối ưu hoá, như bài toán tối ưu véc tơ, bài toán bất đẳng thức biến phân véc tơ, bài toán điểm bất động, bài toán bù… (Giannessi, 2000). Chính vì vai trò quan trọng của bài toán này mà trong hơn hai thập kỷ qua, lớp bài toán này đã nhận được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà toán học trên thế giới. Cho đến nay, chủ đề về điều kiện tồn tại nghiệm cho lớp các bài toán này đã có nhiều kết quả hoàn chỉnh và đa dạng trong cách tiếp cận (Ansari, 2008; Chen *et al.*, 2011). Chủ đề quan trọng kế tiếp chính là tính ổn định nghiệm của bài toán cân bằng, đây là một chủ đề được quan tâm trong những năm gần đây và có tốc độ phát triển rất nhanh. Từ các công trình đã công bố về tính ổn định nghiệm của bài toán cân bằng, cho thấy rằng có hai hướng tiếp cận chính cho chủ đề này, đó là *tính ổn định định tính*, như các dạng nửa liên tục/ liên tục theo nghĩa của Berge hoặc Hausdorff, sự đặt chỉnh (Lignola and Morgan, 2006; Lâm Quốc Anh và Nguyễn Văn Hưng, 2018; Lâm Quốc Anh *et al.*, 2012), và *tính ổn định định lượng* như tính liên tục Lipschitz/Hölder (Lâm Quốc Anh và Phan Quốc Khánh, 2009; Lâm Quốc Anh *et al.*, 2012; Li and Li, 2011). Xuất phát từ việc đáp ứng các tình huống thực tế trong các lĩnh vực kinh tế, kỹ thuật, y học, xã hội,… mô hình bài toán cân bằng hai mức đã được đề xuất và nghiên cứu trong thời gian gần đây. Trong các công trình Bao *et al.* (2007); Mordukhovich (2009), bằng cách sử dụng các công cụ của đối đạo hàm, các tác giả đã thiết lập các điều kiện tối ưu cho các bài toán tối ưu đa mục tiêu với ràng buộc cân bằng. Về sự đặt chỉnh cho các bài toán liên quan đến tối ưu với ràng buộc cân bằng như bài toán cân bằng Nash hai mức, bài toán tối ưu hóa với các ràng buộc bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng với ràng buộc cân bằng đã đạt được nhiều kết quả thú vị trong các bài báo Lignola and Morgan (2006)*;* Lâm Quốc Anh *et al.* (2012*),* Lâm Quốc Anh và Nguyễn Văn Hưng (2018),... Cho đến nay, chưa tìm thấy công trình nào dành cho việc khảo sát tính nửa liên tục của ánh xạ nghiệm các bài toán cân bằng với ràng buộc cân bằng phụ thuộc tham số, với các tham số nhiễu được cho trong các không gian tham số.

Từ những quan sát trên, trong bài báo này, chúng tôi đưa ra mục tiêu khảo sát các bài toán cân bằng với ràng buộc cân bằng có dữ liệu được nhiễu bởi các tham số. Bằng việc xem xét các tập nghiệm của các bài toán này như là các ánh xạ (đa trị) được cho trong các không gian chứa tham số, bài báo này khảo sát các điều kiện ổn định định tính theo nghĩa nửa liên tục và tính đóng đối với ánh xạ nghiệm các bài toán đã được đề cập. Từ việc sử dụng các công cụ hữu hiệu của giải tích đa trị và giải tích lồi, bao gồm các điều kiện liên tục giảm nhẹ và tính lồi suy rộng, các kết quả đạt được là mới và đáp ứng mục tiêu đã được đề xuất.

2 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Cho X, Y, Z và W là các không gian véc tơ tô pô Hausdorff. Cho $A \subset X$ là một tập con compact lồi khác rỗng, $\Lambda \subset W$ là tập con khác rỗng, $C \subset Y$ và $D \subset Z$ là các nón lồi, rắn và có đỉnh và $f: A \times A \times \Lambda \to Y, g: A \times A \times \Lambda \to Z$ là các ánh xạ. Các kí hiệu sau đây sẽ được sử dụng cho quan hệ thứ tự theo nón $K \in \{C, D\}$ trong không gian $E \in \{Y, Z\}$ tương ứng. Với mỗi $x, y \in E$, chúng ta nói

$$x \geq y \Leftrightarrow x - y \in K,$$

$$x > y \Leftrightarrow x - y \in \text{int}K,$$

$$x \ngeq y \Leftrightarrow x - y \notin K,$$

$$x \ngtr y \Leftrightarrow x - y \notin \text{int}K,$$

trong đó $\text{int}K$ là phần trong tô pô của nón K. Các quan hệ $\leq, <, \nleq, \nless$ cũng được định nghĩa một cách tương tự.

Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, chúng ta xét bài toán cân bằng véc tơ với ràng buộc cân bằng phụ thuộc tham số sau đây:

(EPEC) Tìm $\bar{x} \in S_1(\lambda)$ sao cho với mọi $y \in S_1(\lambda)$, chúng ta luôn có $g(\bar{x}, y, \lambda) \nless 0$, ở đó

$$S_1(\lambda) := \{x \in K(\lambda): f(x, y, \lambda) \nless 0, \forall y \in A\}.$$

Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, chúng ta kí hiệu tập nghiệm của bài toán (EPEC) là $S_2(\lambda)$, tức là:

$$S_2(\lambda) := \{x \in S_1(\lambda): g(x, y, \lambda) \nless 0, \forall y \in S_1(\lambda)\}.$$

Định nghĩa 2.1 (Aubin and Frankowska, 1990, Định nghĩa 1.4.1, 1.4.2, trang 38) Cho ánh xạ đa trị $Q: X \rightrightarrows Y$. Khi đó:

(a)Q là nửa liên tục trên tại x_0 nếu với một lân cận bất kỳ U của $Q(x_0)$ thì tồn tại lân cận N của x_0 thỏa $Q(N) \subset U$.

(b)Q là nửa liên tục dưới tại x_0 nếu mọi lưới $\{x_\alpha\}$ hội tụ về x_0 và mọi $y_0 \in Q(x_0)$ thì tồn tại lưới $\{y_\alpha\}$, với $y_\alpha \in Q(x_\alpha)$, thỏa mãn $y_\alpha \to y_0$.

(c)Q là liên tục tại x_0 nếu Q nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới tại x_0.

Bổ đề 2.1 (Hu and Papageorgiou, 1997, Mệnh đề 2.6, trang 37) Cho ánh xạ đa trị $Q: X \rightrightarrows Y$. Khi đó Q là nửa liên tục dưới tại x_0 nếu với mọi lưới $\{x_\alpha\}$ hội tụ về x_0 thì $Q(x_0) \subset \lim\ \inf Q(x_\alpha)$, trong đó

$$\lim \inf Q(x_\alpha) := \{y_0 \in Y: \exists y_\alpha \in\ Q(x_\alpha), y_\alpha \to y_0\}.$$

Bổ đề 2.2 (Hu and Papageorgiou, 1997, Mệnh đề 2.19, trang 41) Nếu $Q(x_0)$ là compact thì Q là nửa liên tục trên tại x_0 nếu và chỉ nếu cho bất kỳ lưới $\{x_\alpha\}$ hội tụ về x_0 và $y_\alpha \in Q(x_\alpha)$ luôn tồn tại lưới con $\{y_\beta\}$ hội tụ về $y_0 \in Q(x_0)$.

Cho hàm $h: X \to Y$ và véc tơ $b \in Y$, chúng ta sử dụng các kí hiệu sau để biểu thị các tập mức của hàm véc tơ h:

$$\mathrm{lev}_{\leq b} h := \{x \in X: h(x) \leq b\},$$

$$\mathrm{lev}_{\geq b} h := \{x \in X: h(x) \geq b\},$$

$$\mathrm{lev}_{\ngtr b} h := \{x \in X: h(x) \ngtr b\},$$

$$\mathrm{lev}_{\nless b} h := \{x \in X: h(x) \nless b\}.$$

Thí dụ 2.1 Cho $X = R, Y = R^2, C = R_+^2$, và xét hàm $h: X \to Y$ được xác định bởi

$$h(x) = (x + 1, 2 - x^2), b = (1,1).$$

Khi đó, $\mathrm{lev}_{\leq b} h = (-\infty, -1], \mathrm{lev}_{\geq b} h = [0,1]$, $\mathrm{lev}_{\ngtr b} h = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty), \mathrm{lev}_{\nless b} h = [-1, +\infty)$.

Định nghĩa 2.2 (Aubin and Frankowska, 1990, Định nghĩa 2.1.1, trang 56) Ánh xạ đa trị $Q: X \rightrightarrows Y$ được gọi là đóng nếu Gph $Q := \{ (x, y) \in X \times Y \mid y \in Q(x)\}$ là tập đóng.

Định nghĩa 2.3 Cho ánh xạ $h: X \to Y$, $b \in Y$ và Ω là một tập con lồi của X. Khi đó,

(a) h là $\mathrm{lev}_{\nleq b}$-lõm trên Ω nếu với mọi $x_1, x_2 \in \Omega$ và $t \in [0,1]$ thỏa $h(x_1) \nless b, h(x_2) \nleq b$ thì $h(tx_1 + (1-t)x_2) \nleq b$.

(b) h là $\mathrm{lev}_{> b}$-lõm trên Ω nếu với mọi $x_1, x_2 \in \Omega$ và $t \in (0,1)$ thỏa $h(x_1) \geq b, h(x_2) > b$ thì $h(tx_1 + (1-t)x_2) > b$.

Trong trường hợp $Y = C \cup (-C)$, thì hai khái niệm trên trùng nhau.

3 TÍNH NỬA LIÊN TỤC TRÊN CỦA ÁNH XẠ

Phần này thiết lập các điều kiện đủ cho tính nửa liên tục trên cho ánh xạ nghiệm trong bài toán (EPEC). Bổ đề sau đây trình bày kết quả về tính nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của ánh xạ ràng buộc S_1.

Bổ đề 3.1 Nếu với mỗi $y \in A, \mathrm{lev}_{\nless 0} f(\cdot, y, \cdot)$ là tập đóng trên $A \times \Lambda$ thì S_1 là nửa liên tục trên và có giá trị compact trong Λ. Hơn nữa, nếu với mỗi $y \in A, \lambda \in \Lambda$, $\mathrm{lev}_{\nless 0} f(\cdot, y, \lambda)$ là tập lồi thì S_1 có giá trị lồi.

Chứng minh

Xét $\lambda_0 \in \Lambda$ tuỳ ý, chúng ta cần chứng minh S_1 là nửa liên tục trên tại λ_0. Giả sử ngược lại, S_1 không nửa liên tục trên tại λ_0, tức là có một lân cận U của $S_1(\lambda_0)$, và một lưới $\{\lambda_\alpha\}$ hội tụ về λ_0 sao cho với mỗi α, tồn tại $x_\alpha \in S_1(\lambda_\alpha) \setminus U$. Do tính compact của A nên chúng ta có thể giả sử $x_\alpha \to x_0$ với $x_0 \in A$. Nếu $x_0 \notin S_1(\lambda_0)$ thì tồn tại $y \in A$ sao cho $f(x_0, y, \lambda_0) < 0$. Vì $x_\alpha \in S_1(\lambda_\alpha)$ nên chúng ta có $f(x_\alpha, y, \lambda_\alpha) \nless 0$. Từ tính đóng của $\mathrm{lev}_{\nless 0} f(\cdot, y, \cdot)$ chúng ta suy ra rằng $f(x_0, y, \lambda_0) \nless 0$. Điều này mâu thuẫn với $f(x_0, y, \lambda_0) < 0$ ở trên. Do đó, $x_0 \in S_1(\lambda_0) \subset U$, điều này là không thể xảy ra vì $x_\alpha \notin U$ với mọi α.

Bây giờ chúng ta chứng minh $S_1(\lambda_0)$ compact. Vì A là tập compact nên chúng ta chỉ cần chứng minh $S_1(\lambda_0)$ đóng trong A. Lấy bất kỳ $x_\alpha \in S_1(\lambda_0)$ với $x_\alpha \to x_0$. Khi đó, với mọi $y \in A$, chúng ta có $f(x_\alpha, y, \lambda_0) \nless 0$. Sử dụng tính đóng của $\mathrm{lev}_{\nless 0} f(\cdot, y, \lambda_0)$, ta được $f(x_0, y, \lambda_0) \nless 0$, tức là $x_0 \in S_1(\lambda_0)$. Vậy $S_1(\lambda_0)$ là tập đóng trong A, và do đó nó là tập compact.

Cuối cùng, chúng ta chứng minh $S_1(\lambda_0)$ tập lồi. Lấy bất kỳ $x_1, x_2 \in S_1(\lambda_0)$ và $t \in [0,1]$, chúng ta cần chỉ ra rằng $x_t := tx_1 + (1-t)x_2 \in S_1(\lambda_0)$. Với mọi $y \in A$, ta có $f(x_i, y, \lambda_0) \nless 0$ $(i = 1, 2)$, tức là $x_1, x_2 \in \mathrm{lev}_{\nless 0} f(\cdot, y, \lambda_0)$. Vì $\mathrm{lev}_{\nless 0} f(\cdot, y, \lambda_0)$ lồi nên $x_t \in \mathrm{lev}_{\nless 0} f(\cdot, y, \lambda_0)$. Điều này có nghĩa là $f(x_t, y, \lambda_0) \nless 0$, và vì thế $x_t \in S_1(\lambda_0)$. Vậy $S_1^w(\lambda_0)$ là tập lồi.

Các thí dụ sau đây minh họa cho tính cốt yếu của các giả thiết trong Bổ đề 3.1.

Thí dụ 3.1 (Tính đóng $\mathrm{lev}_{\nless b} f$ là cốt yếu) Cho $X = Y = R, \Lambda = [0,1], A = [0,1], C = R^+$, và

$$f(x, y, \lambda) = \begin{cases} x - y, & \text{nếu } \lambda = 0, \\ y - x, & \text{nếu } \lambda \in (0,1]. \end{cases}$$

Chúng ta tính được tập nghiệm $S_1(0) = \{1\}$ và $S_1(\lambda) = \{0\}$ với mọi $\lambda \in (0,1]$. Rõ ràng S_1 không nửa liên tục tại 0. Lý do là vì $\mathrm{lev}_{\nless 0} f(\cdot, 1, \cdot)$ không là tập đóng. Thật vậy, cho $x_n = 0, \lambda_n = \frac{1}{n}$, ta có $f(x_n, 1, \lambda_n) = 1 \nless 0$ nhưng $f(0,1,0) = -1 < 0$.

Thí dụ 3.2 (Tính lồi của $\mathrm{lev}_{\nless b} f(\cdot, y, \lambda_0)$ là cốt yếu) Cho $X = Y = R, \Lambda = [1,2], A = [-1,2], C = R^+$, và $f(x, y, \lambda) = \lambda(y + 2)(x^2 - x)$.

Chúng ta tính được $S_1(\lambda) = [-1,0] \cup [1,2\ ]$ với mọi $\lambda \in \Lambda$. Chúng ta thấy rằng S_1 là liên tục và có giá trị compact trên [1,2]. Tuy nhiên, $S_1(\lambda)$ không là tập lồi. Lý do là $\mathrm{lev}_{\geq 0} f(\cdot, y, \lambda)$ không là tập lồi. Thật vậy, lấy $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ y = -1, \lambda = 1$, ta có $f(x_1, -1, 1) = 0,\ f(x_2, -1, 1) = 0$, nhưng

$$f(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, -1, 1) = f(\frac{1}{2}, -1, 1) = -\frac{1}{4} \ngeq \frac{1}{2} f(x_1, -1, 1) + \frac{1}{2} f(x_2, -1, 1) = 0.$$

Bổ đề 3.2 Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, giả sử tồn tại $x \in A$ sao cho $f(x,y,\lambda) \nleq 0$ với mọi $y \in A$. Giả sử thêm rằng $\mathrm{lev}_{\leq 0} f$ là tập đóng trong $A \times A \times \Lambda$ và với mọi $y \in A$, chúng ta có $f(\cdot,y,\lambda)$ là $\mathrm{lev}_{\leq 0}$-lõm trong A. Khi đó, ta có S_1 là nửa liên tục dưới trong Λ.

Chứng minh

Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, đặt $S_0(\lambda) \coloneqq \{x \in A : f(x,y,\lambda) \nleq 0, \forall y \in A\}$. Trước nhất chúng ta chứng minh rằng S_0 là nửa liên tục dưới tại $\lambda_0 \in \Lambda$ tuỳ ý. Giả sử rằng có S_0 là không nửa liên tục dưới tại λ_0. Khi đó, tồn tại lưới $\{\lambda_\alpha\}$ hội tụ về λ_0 và $x_0 \in S_0(\lambda_0)$ sao cho với mọi lưới $\{x_\alpha\}, x_\alpha \in S_0(\lambda_\alpha)$ đều không hội tụ về x_0. Lấy bất kỳ $\bar{x} \in A, t_\alpha \in [0,1]$ và đặt $\hat{x}_\alpha \coloneqq t_\alpha \bar{x} + (1-t_\alpha)x_0$, khi đó $\hat{x}_\alpha \in A$ và $\hat{x}_\alpha \to x_0$ khi $t_\alpha \to 0^+$. Theo giả thiết phản chứng ở trên, tồn tại lưới con $\{\hat{x}_\beta\}$ với $\hat{x}_\beta \notin S_0^w(\lambda_\beta)$ với mọi β. Điều này có nghĩa là tồn tại $y_\beta \in A$, sao cho

$$f(\hat{x}_\beta, y_\beta, \lambda_\beta) \leq 0. \quad (1)$$

Do A compact nên chúng ta có thể giả sử tồn tại một lưới $\{y_\beta\}$ hội tụ về y_0 với $y_0 \in A$. Do tính đóng của $\mathrm{lev}_{\leq 0} f$ cùng với (1), ta thu được $f(x_0,y_0,\lambda_0) \leq 0$, điều này mâu thuẫn với $x_0 \in S_0(\lambda_0)$.

Bây giờ, chúng ta kiểm tra rằng

$$S_1(\lambda_0) \subset \mathrm{cl} S_0(\lambda_0), \quad (2)$$

ở đây kí hiệu "clD" là bao đóng của tập D. Lấy $x_1 \in S_1(\lambda_0), x_0 \in S_0(\lambda_0), t \in (0,1)$ và $x_t \coloneqq (1-t)x_1 + tx_0$. Khi $t \to 0$ thì $x_t \to x_1$. Với mỗi $y \in A$, ta có $f(x_0,y,\lambda_0) \nleq 0$ và $f(x_1,y,\lambda_0) \not< 0$. Sử dụng tính $\mathrm{lev}_{\nleq 0}$-lõm của $f(\cdot,y,\lambda_0)$, chúng ta thu được $f(x_t,y,\lambda_0) \nleq 0$, tức là $x_t \in S_0(\lambda_0)$. Do đó, (2) đúng. Sử dụng tính nửa liên tục dưới của S_0 tại λ_0, chúng ta được:

$$\begin{aligned} S_1(\lambda_0) \subset \mathrm{cl} S_0(\lambda_0) &\subset \liminf S_0(\lambda_\alpha) \\ &\subset \liminf S_1(\lambda_\alpha). \end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là S_1 là nửa liên tục dưới tại λ_0, và vì thế nó nửa liên tục dưới trong Λ.

Từ Bổ đề 3.1 và Bổ đề 3.2, chúng ta có các kết quả sau.

Định lí 3.1 Với mỗi $y \in A, \lambda \in \Lambda$, giả sử rằng $f(\cdot,y,\lambda)$ là $\mathrm{lev}_{\nleq 0}$-lõm trên A, $\mathrm{lev}_{\not< 0} f(\cdot,y,\cdot)$ là tập lồi đóng trong $A \times \Lambda$. Giả sử thêm rằng, $\mathrm{lev}_{\leq 0} f$ là tập đóng trong $A \times A \times \Lambda$, Khi đó, S_1 có giá trị lồi compact và liên tục trong Λ.

Bây giờ, chúng ta phát biểu kết quả về tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm bài toán cân bằng véc tơ với ràng buộc cân bằng.

Định lí 3.2 Giả sử các giả thiết của Định lí 3.1 đều được thỏa mãn và $\mathrm{lev}_{\not< 0} g$ là tập đóng trong $A \times A \times \Lambda$. Khi đó S_2 là đóng và nửa liên tục trên trong Λ.

Chứng minh

Xét $\lambda_0 \in \Lambda$ tuỳ ý, chúng ta cần chứng minh S_2 là nửa liên tục trên tại λ_0. Giả sử ngược lại, S_2 không nửa liên tục trên tại λ_0, tức là có một lân cận U của $S_2(\lambda_0)$ sao cho tồn tại một lưới $\{\lambda_\alpha\}$ hội tụ về λ_0 và một lưới $\{x_\alpha\}$, $x_\alpha \in S_2(\lambda_\alpha) \setminus U$ với mọi α. Theo kết quả của Bổ đề 3.1, S_1 là nửa liên tục trên tại λ_0 và $S_1(\lambda_0)$ là tập compact. Vì vậy, chúng ta có thể giả sử rằng $x_\alpha \to x_0$ với $x_0 \in S_1(\lambda_0)$. Nếu $x_0 \notin S_2(\lambda_0)$ thì tồn tại $y_0 \in S_1(\lambda_0)$ sao cho $g(x_0,y_0,\lambda_0) < 0$. Từ kết quả của Bổ đề 3.2, chúng ta suy ra S_1 là nửa liên tục dưới tại λ_0, và do đó tồn tại một lưới $\{y_\alpha\}$, $y_\alpha \in S_1(\lambda_\alpha)$ thỏa mãn $y_\alpha \to y_0$. Do $x_\alpha \in S_2(\lambda_\alpha)$ nên $g(x_\alpha,y_\alpha,\lambda_\alpha) \not< 0$. Kết hợp điều này với tính đóng của $\mathrm{lev}_{\not< 0} g$, chúng ta được $g(x_0,y_0,\lambda_0) \not< 0$, điều này mâu thuẫn với $g(x_0,y_0,\lambda_0) < 0$. Do đó $x_0 \in S_2(\lambda_0) \subset U$, điều này là không thể xảy ra vì $x_\alpha \notin U$ với mọi α.

Với kỹ thuật chứng minh tương tự như trong Bổ đề 3.1, chúng ta cũng thu được tính compact của $S_2(\lambda_0)$. Do S_2 là nửa liên tục trên trong Λ và $S_2(\lambda)$ có giá trị đóng với mọi $\lambda \in \Lambda$, sử dụng Bổ đề 2.2 chúng ta dễ dàng chứng minh được S_2 đóng.

4 KẾT LUẬN

Trong bài báo này, bằng cách sử dụng các giả thiết liên quan đến tính đóng giảm nhẹ và dạng lồi suy rộng, tính nửa liên tục trên và tính đóng của ánh xạ nghiệm bài toán cân bằng với ràng buộc cân bằng phu thuộc vào tham số đã được nghiên cứu thành công. Do bài toán cân bằng là dạng tổng quát của nhiều bài toán quan trọng trong tối ưu hoá như đã đề cập ở Mục 1, nên các kết quả đạt được của bài báo có thể áp dụng để thiết lập điều kiện ổn định cho bài toán tối ưu hai mức, bài toán tối ưu có ràng buộc cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân hai mức,… Gần đây, việc nghiên cứu các mô hình tổng quát của bài toán cân bằng như bài toán bao hàm biến phân, bài toán quan hệ biến phân đã được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm. Do đó, những công cụ và cách tiếp cận đã được đề xuất trong bài báo này vẫn có thể áp dụng trong việc nghiên cứu điều kiện ổn định cho các lớp bài toán tổng quát vừa nêu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., 2009. Hölder continuity of the unique solution to quasiequilibrium problems in metric Spaces. Journal of Optimization Theory and Applications, 141(1): 37–54.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Tam, T.N., 2012. On Hölder continuity of approximate solutions to parametric equilibrium problems. Nonlinear Analysis, 75(4): 2293–2303.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Van, D.T.M., 2012. Well-posedness under relaxed semicontinuity for bilevel equilibrium and optimization problems with equilibrium constraints. Journal of Optimization Theory and Applications, 153(1): 42–59.

Anh, L.Q., Hung, N.V., 2018. Levitin–Polyak well-posedness for strong bilevel vector equilibrium problems and applications to traffic network problems with equilibrium constraints. Positivity 22: 1223–1239.

Ansari, Q.H., 2008. Existence of solutions of systems of generalized implicit vector quasiequilibrium problems. Journal of Mathematics Analysis and Applications, 341(2): 271–1283.

Aubin, J.P., Frankowska, H., 1990. Set-Valued Analysis. Birkhäuser. Boston, 474 pages.

Bao, T.Q., Gupta, P., Mordukhovich, B.S., 2007. Necessary conditions in multiobjective optimization with equilibrium constraints. Journal of Optimization Theory and Applications, 135(2):179–203.

Chen, J.W., Cho, Y.J., Kim, J.K., Li, J., 2011. Multiobjective optimization problems with modified objective functions and cone constraints and applications. Journal of Global Optimization, 49(1): 137–147.

Giannessi, F.: Ed., Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria, vol. 38 of Nonconvex Optimization and its Applications, Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 2000.

Hu, S. and Papageorgiou, N., 1997. Handbook of Multivalued Analysis, Volume I: Theory. Kluwer, Boston.

Lignola, M.B., Morgan, J., 2006. α-Well-posedness for Nash equilibria and for optimization problems with Nash equilibrium constraints. Journal of Global Optimization, 36(3): 439–459.

Li, S.J., Li, X.B., 2011. Hölder continuity of solutions to parametric weak generalized Ky Fan inequality. Journal of Optimization Theory and Applications, 149(3): 540–553.

Mordukhovich, B.S., 2009. Characterizations of linear suboptimality for mathematical programs with equilibrium constraints. Mathematical Programming, 120(1): 261–283.