

Sử dụng phần mềm lập trình MathCad giải bài toán xác định trạng thái ứng suất - biến dạng trong Cơ học môi trường liên tục

Determining the stress strain state in Continuum mechanics using MathCad software

> THS NGUYỄN THỊ THÙY LIÊN, THS ĐÀO NGỌC TIẾN, THS LÊ THỊ THANH HÀ, TS NGUYỄN VIỆT PHƯƠNG
Khoa Xây dựng, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội ; Email: lienntt@hau.edu.com

TÓM TẮT

MathCad là một phần mềm lập trình tính toán đa năng, dễ tiếp cận và sử dụng. Phần mềm MathCad được sử dụng rộng rãi và hiệu quả trong việc giảng dạy một số môn học tại các trường đại học kỹ thuật. Trong bài báo, nhóm tác giả giới thiệu về việc sử dụng MathCad để xác định trạng thái ứng suất- biến dạng trong Cơ học môi trường liên tục.

Từ khóa: Cơ học môi trường liên tục; MathCad; trạng thái ứng suất - biến dạng.

ABSTRACT

MathCad is a programming software, which is versatile, easy to use, and accessible. This program is widely and intensively used in teaching various subjects at many technical universities. In this article, the authors present the application of the MathCad software in determining the stress-strain state in Continuum mechanics.

Key words: Continuum mechanics; MathCad; stress-strain state

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Cơ học môi trường liên tục có nhiệm vụ là xác định trạng thái ứng suất, trạng thái biến dạng và trường chuyển vị trong môi trường liên tục khi chịu tác dụng của ngoại lực hoặc các yếu tố ảnh hưởng khác. Cũng như các môn cơ học biến dạng khác, các kết quả của môn học là cơ sở cho việc giải quyết các bài toán kỹ thuật. Nội dung của Cơ học môi trường liên tục được chia thành hai phần: cơ sở lý thuyết; áp dụng lý thuyết để phân tích và giải các bài toán cụ thể.

Có nhiều loại bài toán trong Cơ học môi trường liên tục. Trong đó, bài toán xác định trạng thái ứng suất - trạng thái biến dạng cho biết khả năng chịu lực và biến dạng tại các điểm trong môi trường, là cơ sở cho việc tính toán, thiết kế các cấu kiện trong các môn học chuyên ngành. Tuy nhiên, bài toán vẫn được giải bằng phương pháp "thủ công", người làm mất nhiều thời gian vào các thao tác toán học phức tạp mà đôi khi quên mất bản chất cơ học của bài toán.

Hiện nay có rất nhiều phần mềm hỗ trợ lập trình giải các bài toán cơ học công trình như Matlab, MathCad... Việc sử dụng các phần mềm này vào việc lập trình giải các bài toán cơ học công trình đã được đưa vào chương trình giảng dạy của nhiều trường đại học trên thế giới. Đặc điểm của các phần mềm này là không quá khó sử dụng như các ngôn ngữ lập trình chuyên nghiệp.

Trong bài báo dưới đây, nhóm tác giả sẽ ứng dụng phần mềm lập trình Mathcad để xác định trạng thái ứng suất - trạng thái biến dạng trong môi trường. Qua bài toán ứng dụng này để thấy rõ, việc áp dụng các phần mềm hỗ trợ lập trình vào việc phân tích và giải các bài toán là cần thiết, đúng với xu hướng phát triển của khoa học kỹ thuật hiện đại, là tiền đề cho việc đổi mới phương pháp và nội dung giảng dạy môn Cơ học môi trường liên tục trong trường Đại học.

2. MỘT SỐ THIẾT LẬP CƠ BẢN TRONG MATHCAD ĐƯỢC DÙNG TRONG BÀI TOÁN

2.1. Nhập phương trình theo dấu phương trình gán giá trị (:=)

Dấu phương trình gán giá trị (:=) dùng để gán các giá trị cho các biến mà sẽ dùng trong các công thức sau đó, có thể được thể hiện trong ví dụ như trên hình 1.

$$\begin{array}{l} x := 3 \\ y := 5 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{array}$$

Hình 1. Ví dụ về dấu "=" gán giá trị

2.2. Sử dụng hàm Given/Find để giải phương trình và hệ phương trình tuyến tính hoặc phi tuyến với nhiều ẩn số khác nhau.

Khi dùng hàm này để giải phương trình, thì yêu cầu là phải cho trước các giá trị gán đúng ban đầu của các biến số, vì nghiệm của hệ được xác định theo hàm này bằng phương pháp nội suy. Áp dụng hàm Given/Find trong việc giải phương trình và hệ phương trình thường được tiến hành theo các bước như sau:

- Cho trước các giá trị gán đúng ban đầu của các biến số;
- Gõ lệnh Given;
- Nhập các phương trình và hệ phương trình phía bên phải hoặc phía dưới lệnh Given. Dấu "=" đậm có thể chọn bằng tổ hợp phím Ctrl+= hoặc từ thanh công cụ có sẵn trên màn hình;
- Nhập biểu thức chứa hàm Find để xác định nghiệm phương trình hoặc hệ phương trình: Find(x₁,x₂,x₃,...) với x₁, x₂, x₃... là các biến

số. Số lượng biến số phải bằng số phương trình. Ví dụ giải phương trình được thể hiện như trên hình 2.

```

x := 1   y := 1   z := 1
Given
2x + y2 - 3z = 5
x2 + 3y + z = 0
x + y + 3z = 1
Nghiệm := Find (x,y,z)

Nghiệm =  $\begin{pmatrix} 1.9 \\ -1.241 \\ 0.114 \end{pmatrix}$ 
    
```

Hình 2. Ví dụ giải hệ phương trình bằng hàm Given/Find

2.3. Ma trận và véc tơ

Đánh số các thành phần trong ma trận

Trật tự việc đánh số các thành phần trong ma trận được quản lý bằng biến có sẵn trong hệ thống (built-in variable) ORIGIN. Theo mặc định của chương trình ORIGIN=0, điều đó có nghĩa là thành phần đầu tiên của ma trận được đánh số 0. Tuy nhiên người sử dụng có thể quy định trật đánh số các thành phần trong ma trận bắt đầu từ một số bất kỳ.

Thiết lập ma trận

Cách đơn giản nhất để tạo ma trận hay véc tơ (ma trận có một cột) là tạo một mảng trống sau đó nhập các phần tử vào trong ma trận như sau:

- Đặt tên ma trận và nhập toán tử gán giá trị (:=)

$$D :=$$

- Chọn từ menu Insert ► Matrix hoặc từ thanh công cụ để tạo mảng số trống với số hàng (rows) và cột (columns) do người sử dụng định nghĩa.

$$D := \begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$$

- Nhập giá trị bằng số hoặc ký tự (symbolic) vào trong mảng số đã tạo lập như trên hình 3.

$$D1 := \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{pmatrix} \quad D2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Hình 3. Ví dụ nhập các phần tử trong ma trận

Các phép tính cơ bản của ma trận

MathCad cho phép thực hiện tất cả các phép tính cơ bản, chuyển trí, nghịch đảo, xác định định thức, tìm trị riêng và véc tơ trị riêng... cho ma trận dưới dạng số và Symbolics. Khi thực hiện các phép tính của ma trận cần lưu ý các ma trận phải có kích thước tương thích.

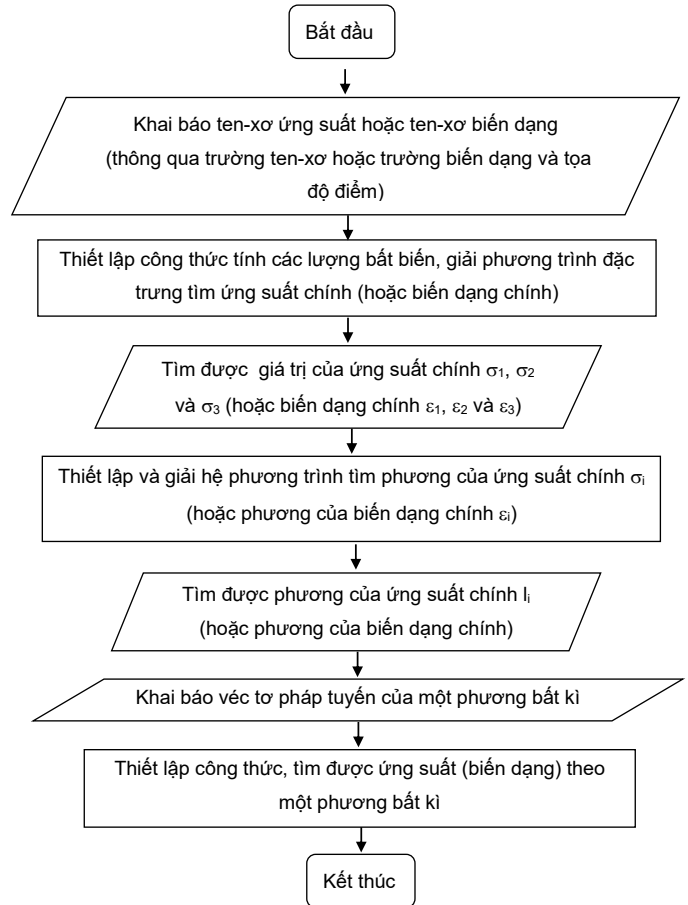
3. BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT - TRẠNG THÁI BIẾN DẠNG TRONG CƠ HỌC MÔI TRƯỜNG LIÊN TỤC

Nội dung bài toán:

- Lập ten- xơ ứng suất (hoặc ten- xơ biến dạng) tại một điểm.
 - Từ trường ten- xơ biến dạng (hoặc ten- xơ ứng suất) đã biết, thông qua định luật Hooke về mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng để xác định được đại lượng ứng suất (hoặc biến dạng) theo yêu cầu.
 - Xác định giá trị và phương của ứng suất chính (hoặc biến dạng chính).
 - Xác định ứng suất (hoặc biến dạng) theo một phương bất kì.
- Để giải bài toán phân tích trạng thái ứng suất - trạng thái biến

dạng cần sử dụng các phép toán véc-tơ và ma trận, giải phương trình đại số.

Trình tự của bài toán được triển khai theo sơ đồ khối thể hiện ở hình 4.



Hình 4. Sơ đồ khối bài toán xác định trạng thái ứng suất- trạng thái biến dạng bằng phần mềm lập trình Mathcad

4. VÍ DỤ

Trạng thái ứng suất tại điểm K của môi trường trong hệ tọa độ Đề-các O_{x₁x₂x₃} cho bởi ten-xơ:

$$T_{\sigma,K} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ (kN / cm}^2\text{)}$$

Yêu cầu:

- Xác định giá trị ứng suất chính thứ nhất và phương của ứng suất này tại K.
- Xác định ứng suất toàn phần, ứng suất pháp, ứng suất tiếp trên mặt nghiêng đi qua K và có véc tơ pháp tuyến:

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{11}} \vec{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{11}} \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{11}} \vec{e}_3$$

Lời giải

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad \text{TOL} := 10^{-14}$$

Nhập các hệ số của ten- xơ ứng suất tại điểm K:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &:= 8 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} & \sigma_{22} &:= 6 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} & \sigma_{33} &:= -2 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \\ \sigma_{12} &:= -4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} & \sigma_{13} &:= 1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} & \sigma_{23} &:= 3 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \end{aligned}$$

Nhập được:

$$T_{\sigma} := \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad T_{\sigma} := \begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

a) Xác định giá trị ứng suất chính thứ nhất và phương của ứng suất này tại điểm K

Tính các bất biến của trạng thái ứng suất tại điểm K:

$$I1 := \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I2 := \left(\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \right) \rightarrow -\frac{6 \cdot \text{kN}^2}{\text{cm}^4}$$

$$I3 := \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow -\frac{166 \cdot \text{kN}^3}{\text{cm}^6}$$

Phương trình đặc trưng để tìm các ứng suất chính:

$$I(\sigma) := \sigma^3 - \left(\frac{I1}{\text{cm}^2} \right) \cdot \sigma^2 + \left[\left(\frac{I2}{\text{cm}^2} \right)^2 \right] \cdot \sigma - \frac{I3}{\left(\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right)^3}$$

Giải phương trình đặc trưng, tìm được các ứng suất chính:

Given $\sigma_1 := 20$ $\sigma_2 := 2$ $\sigma_3 := -45$

$I(\sigma_1) = 0$ $I(\sigma_2) = 0$ $I(\sigma_3) = 0$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \cdot \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = \begin{pmatrix} 11.215 \\ 4.26 \\ -3.475 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Ứng suất chính thứ $\sigma_1 := 11.215 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ nhất:

Lập và giải hệ phương trình để tìm phương của ứng suất chính thứ nhất (σ_1):

Given L1 := 0.5 L2 := 0.1 L3 := 0.2 ($\sigma_{11} - \sigma_1$).L1 + σ_{12} .L2 + + σ_{13} .L3 = 0 (σ_{12} .L1 + ($\sigma_{22} - \sigma_1$).L2 + + σ_{23} .L3 = 0 L1 ² + L2 ² + L3 ² = 1 $\begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix} := \text{Find}(L1, L2, L3) =$ $\begin{pmatrix} 0.766 \\ -0.637 \\ -0.087 \end{pmatrix}$	Given L1 := -0.5 L2 := 0.1 L3 := 0.2 ($\sigma_{11} - \sigma_1$).L1 + σ_{12} .L2 + + σ_{13} .L3 = 0 (σ_{12} .L1 + ($\sigma_{22} - \sigma_1$).L2 + + σ_{23} .L3 = 0 L1 ² + L2 ² + L3 ² = 1 $\begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix} := \text{Find}(L1, L2, L3) =$ $\begin{pmatrix} -0.766 \\ 0.637 \\ 0.087 \end{pmatrix}$
---	---

Vậy, ứng suất chính thứ nhất σ_1 nằm trên hai mặt có cô-sin chỉ phương ($l_1; l_2; l_3$) lần lượt là (0,766; -0,637; -0,087) và (-0,766; 0,637; 0,087)

b) Xác định ứng suất toàn phần, ứng suất pháp, ứng suất tiếp trên mặt nghiêng đi qua điểm K và có véc tơ pháp tuyến

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{11}} \vec{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{11}} \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{11}} \vec{e}_3$$

Nhập các cô-sin chỉ phương của véc tơ pháp tuyến:

$$L1_v := \frac{1}{\sqrt{11}} \quad L2_v := \frac{3}{\sqrt{11}} \quad L3_v := \frac{1}{\sqrt{11}}$$

Ứng suất toàn phần tại K:

$$p_v := T_{\sigma} \cdot \begin{pmatrix} L1_v \\ L2_v \\ L3_v \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p_{v_1} \\ p_{v_2} \\ p_{v_3} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.905 \\ 5.13 \\ 2.41 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Giá trị ứng suất toàn phần:

$$P_v := \sqrt{(p_{v_1})^2 + (p_{v_2})^2 + (p_{v_3})^2} = 5.74 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Ứng suất pháp, ứng suất tiếp trên mặt nghiêng:

Giá trị ứng suất pháp:

$$\sigma_{vv} := p_v \cdot \begin{pmatrix} L1_v \\ L2_v \\ L3_v \end{pmatrix} = 5.094 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Giá trị ứng suất tiếp:

$$\sigma_{v\eta} := \sqrt{(P_v)^2 - (\sigma_{vv})^2} = 2.645 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

*Kiểm tra lại kết quả tính toán:

Vec to ứng suất pháp

$$\sigma_{vv} := \sigma_{vv} \cdot \begin{pmatrix} L1_v \\ L2_v \\ L3_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.536 \\ 4.608 \\ 1.536 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Vec to ứng suất tiếp

$$\sigma_{v\eta} := p_v - \sigma_{vv} = \begin{pmatrix} -2.441 \\ 0.522 \\ 0.874 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Giá trị ứng suất tiếp:

$$\sigma_{v\eta} := \sqrt{(\sigma_{v\eta_1})^2 + (\sigma_{v\eta_2})^2 + (\sigma_{v\eta_3})^2} = 2.645 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Kết quả này trùng với kết quả tính toán ở trên.

5. NHẬN XÉT

Phần mềm MathCad có giao diện trực quan, dễ tiếp cận và sử dụng, các phép tính sử dụng các ký hiệu toán học quen thuộc. Việc sử dụng MathCad đã loại bỏ được các khó khăn về mặt toán học, giúp việc giải bài toán phức tạp (nếu giải theo phương pháp truyền thống) trở nên đơn giản.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Ngọc Hồng - Lê Ngọc Thạch, *Cơ học môi trường liên tục và lý thuyết đàn hồi*, NXB Khoa học và kỹ thuật, 2002.
2. Trần Văn Liên, *Cơ học môi trường liên tục*, NXB Xây dựng, 2011.
3. Vũ Thị Bích Quyên, *Đề tài nghiên cứu khoa học cấp trường "Nghiên cứu giải các bài toán Sức bền vật liệu áp dụng phần mềm MathCad"*, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội, 2017.
4. G. Thomas Mase, George E. Mase, *"Continuum mechanics for engineers"*. Publisher "CRC Press LLC", 1999.
5. Michael Lai, Erhard Krempl, David Rubin, *"Continuum mechanics"*, Butterworth-Heinemann publications, 2010
6. Brent Maxfield, *Essential MathCAD for Engineering, Science, and Math*, USA, 2009.