

Sử dụng các kỹ thuật trí tuệ nhân tạo dự đoán tần số dao động riêng hệ kết cấu khung không gian

Using artificial neural network to predict the frequency of three-dimensional frame structure

> TS NGUYỄN XUÂN BÀNG

Viện Kỹ thuật công trình đặc biệt; Học viện Kỹ thuật quân sự

Email: nxb@lqdtu.edu.vn

TÓM TẮT

Bài báo ứng dụng mô hình ANN với các kỹ thuật Levenberg - Marquardt, Bayesian Regularization, Scaled Conjugate Gradient dự đoán tần số dao động riêng của hệ kết cấu khung không gian. Mô hình tính toán của bài toán là hệ kết cấu khung - cọc không gian, biến dạng đàn hồi tuyến tính, liên kết cọc - nền được thay thế bằng ngàm tương đương. Với kết quả dự đoán gần như chính xác (sai số không quá 1,58%), cho thấy việc ứng dụng ANN với các kỹ thuật trên trong dự đoán tần số dao động riêng của hệ kết cấu thanh - cọc không gian là đáng tin cậy, khả thi. Điều này hết sức có ý nghĩa trong giải quyết các bài toán nhận dạng, chẩn đoán kết cấu công trình, đặc biệt là với các kết cấu phức tạp, quy mô bài toán lớn, tham số bị ảnh hưởng bởi nhiều yếu tố thay đổi trong quá trình khai thác, phù hợp với khu vực có điều kiện khó khăn về thời tiết, khí hậu và khó khăn về điều kiện cơ sở hạ tầng công nghệ thông tin, phần mềm chuyên dùng.

Từ khóa: Tần số dao động riêng, trí tuệ nhân tạo (ANN), Levenberg - Marquardt, Bayesian Regularization, Scaled Conjugate Gradient.

1. MỞ ĐẦU

Việc xác định các tần số dao động riêng của kết cấu khi có sự thay đổi sơ đồ tính (do sai khác trong giả thiết khi thiết kế hoặc do thay đổi trong quá trình sử dụng, ...) là rất cần thiết và quan trọng, đặc biệt đối với kết cấu chịu tác dụng của tải trọng động (như sóng biển, tải trọng nổ, ...). Ví dụ, đối với kết cấu dạng móng cọc (được ứng dụng nhiều trong các công trình xây dựng, giao thông, thủy lợi, công trình biển đảo, ...), trong tính toán có thể thay liên kết cọc - nền bằng liên kết ngàm cứng tại chiều sâu ngàm tương đương (ngàm tương đương). Chiều sâu ngàm tương đương có thể xác định theo [1,2]. Tuy nhiên, hoặc do giả thiết ban đầu (điều kiện địa chất nền, biện pháp thi công, ...) chưa sát thực tế dẫn đến việc xác định chiều sâu ngàm tương đương không chính xác, hoặc trong quá trình khai thác sử dụng, liên kết giữa cọc với nền có thể bị suy giảm theo thời gian, do đó chiều sâu ngàm tương đương bị thay

ABSTRACT

The paper applies the ANN model with Levenberg - Marquardt, Bayesian Regularization, Scaled Conjugate Gradient techniques to predict the frequencies of the three-dimensional frame structure. The computational model of the problem is a frame - pile structural system in the form of three-dimensional frame, linear elastic deformation, pile - soil link is replaced by a hard restraint (fixed) with equivalent restraint depth. With almost accurate prediction results (with an error of no more than 1.58%), it shows that the application of ANN with the above techniques in predicting the frequencies of the three-dimensional frame structure is reliable, feasible. This is very meaningful in solving problems of identification and diagnosis of structures, especially with complex structures, large of problems, parameters affected by many changing factors in the process of exploitation, suitable to areas with difficult conditions in weather, climate and difficult conditions in information technology infrastructure and specialized software.

Key words: Frequencies; predict; Levenberg - Marquardt; Bayesian Regularization; Scaled Conjugate Gradient.

đổi. Khi chiều sâu ngàm tương đương thay đổi, dẫn đến các thông số sơ đồ tính thay đổi, và do đó các tham số dao động của kết cấu thay đổi, dẫn đến thay đổi khả năng chịu lực của kết cấu. Không phải lúc nào cũng có thể sử dụng được chương trình tính toán (phần mềm) chuyên dụng để xác định các tham số dao động (tần số, dạng dao động) của kết cấu, đặc biệt là trong những điều kiện khó khăn về khí hậu thời tiết, về điều kiện cơ sở vật chất ở khu vực biển, đảo, xa đất liền.

Trong những năm gần đây, cùng với sự tiến bộ của khoa học máy tính, trong lĩnh vực công nghệ nói chung và kỹ thuật xây dựng công trình nói riêng, mạng nơ non nhân tạo (ANN - Artificial Neural Networks) đã được nghiên cứu ứng dụng để mô hình hóa các quan hệ phi tuyến giữa các thông số của đối tượng cũng như để mô hình hóa các quan hệ của kết cấu công trình dựa trên tập số liệu đầu vào, số liệu đầu ra đã có. Nhiều nghiên cứu trên thế giới đã

sử dụng ANN để dự đoán cường độ của vật liệu bê tông [3, 4], nhiệt thủy hóa của xi măng [5], độ mở rộng vết nứt trong bê tông [6], hoặc hư hỏng trong kết cấu [7, 8]. Ở Việt Nam, tác giả Đỗ Anh Tú (và các cộng sự) đã xây dựng mô hình ANN trong dự báo khả năng nứt nhiệt trong bê tông tuổi sớm [9]; tác giả Nguyễn Thủy Anh và các cộng sự đã nghiên cứu tối ưu hóa số nơ ron để dự đoán liên kết giữa tấm FRP và bê tông [10]. Tuy nhiên, chưa có nghiên cứu nào nghiên cứu ứng dụng ANN và đánh giá các kỹ thuật được sử dụng trong dự đoán tần số dao động riêng của kết cấu khung không gian theo sự thay đổi của chiều sâu ngầm tương đương, đây là nội dung cần thiết cho bài toán phân tích, chẩn đoán kết cấu công trình. Trong bài báo, sử dụng tập dữ liệu giả định (từ chương trình tính toán kết cấu) để đánh giá việc xây dựng, lựa chọn phương pháp kỹ thuật của mô hình ANN trong dự đoán tần số dao động riêng của kết cấu khung không gian.

2. CƠ SỞ TÍNH TOÁN THAM SỐ DAO ĐỘNG CỦA HỆ KẾT CẤU THANH - CỌC THEO MÔ HÌNH BÀI TOÁN KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Khảo sát hệ kết cấu thanh - cọc dưới dạng khung không gian chịu tác dụng tải trọng động (hình 1) trong hệ tọa độ vuông góc Oxyz.

Thừa nhận các giả thiết sau đây:

- Liên kết cọc - nền được thay thế bằng liên kết ngàm cứng tương đương.
- Biến dạng của hệ kết cấu thanh - cọc là đàn hồi tuyến tính và bé.

Mô hình tính của kết cấu được thể hiện trên hình 2.

Để tính toán các tham số dao động của hệ kết cấu thanh - cọc sẽ sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH).

Phương trình chuyển động của hệ kết cấu thanh - cọc - nền theo phương pháp PTHH [11,12], sau khi đã đưa các điều kiện biên vào hệ, có thể thiết lập được dưới dạng:

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = P(t), (1)$$

trong đó: $U(t), \dot{U}(t), \ddot{U}(t)$ - tương ứng là các véc tơ chuyển vị, vận tốc và gia tốc nút của hệ kết cấu thanh - cọc;

M, K, C - tương ứng là các ma trận khối lượng, ma trận độ cứng, ma trận cản của hệ kết cấu;

$P(t)$ - véc tơ tải trọng quy nút của hệ kết cấu.

Ma trận cản của hệ kết cấu nút có thể tính theo ma trận khối lượng và ma trận độ cứng dưới dạng:

$$C = \alpha M + \beta K, (2)$$

trong đó: α, β - các hệ số phụ thuộc vào các tần số dao động riêng của hệ và hệ số cản nhớt của vật liệu.

Các ma trận của toàn hệ trong phương trình (1) có thể xây dựng từ các ma trận của các PTHH trong hệ bằng phương pháp "độ cứng trực tiếp" [11,12]. Dưới đây dẫn ra các ma trận của các PTHH đối với hệ kết cấu thanh - cọc không gian.

Các ma trận khối lượng m , ma trận độ cứng k , véc tơ tải trọng quy nút p của phần tử trong hệ tọa độ cục bộ được xác định theo [11,12].

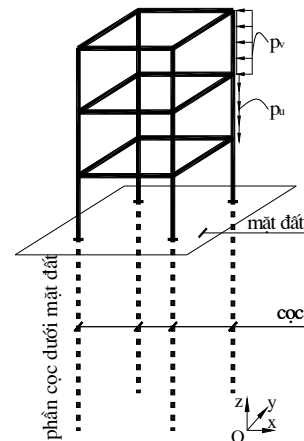
Phương trình dao động riêng của hệ:

$$KU(t) + M\ddot{U}(t) = 0 \quad (3)$$

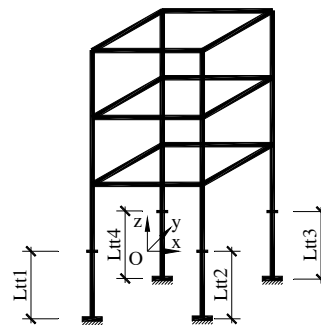
Để giải (3), tác giả sử dụng phương pháp lặp Power- Sweeping [11].

Trên cơ sở phương pháp PTHH, các thuật toán nói trên đã lập trình để tính toán nội lực, chuyển vị, dao động riêng của kết cấu trên máy tính, chương trình mang tên **SYM**, chương trình đã được

kiểm tra độ tin cậy [11].



Hình 1. Mô hình thực hệ kết cấu thanh - cọc không gian



Hình 2. Mô hình tính hệ kết cấu thanh - cọc không gian

3. XÂY DỰNG MÔ HÌNH MẠNG NƠ RON NHÂN TẠO (ANN) DỰ ĐOÁN TẦN SỐ DAO ĐỘNG RIÊNG

3.1. Mạng ANN

Mạng nơ ron nhân tạo là một bộ vi xử lý song song phân bố có khả năng lưu trữ thông tin và tái sử dụng các thông tin được lưu trữ đó. Mạng mô phỏng hoạt động của não bộ con người trong hai lĩnh vực: kiến thức được thu thập trong một quá trình học; và các kết nối giữa những nơ ron chứa các trọng số và các trọng số này được sử dụng để lưu trữ kiến thức thu thập được trong quá trình học.

Cấu trúc chung của ANN thường bao gồm 3 thành phần gồm lớp đầu vào, lớp ẩn và lớp đầu ra. Trong đó lớp đầu vào là lớp đầu tiên, lớp đầu ra là lớp cuối cùng và kết nối giữa hai lớp là lớp ẩn. ANN được học bằng kinh nghiệm thông qua giai đoạn đào tạo, có khả năng lưu trữ và sử dụng để dự đoán dữ liệu chưa biết (thử nghiệm). Trong giai đoạn huấn luyện thuật toán, ANN học cách nhận dạng các mẫu từ dữ liệu đầu vào, sau đó so sánh kết quả được tạo với kết quả mong muốn.

ANN có nhiều loại thuật toán có thể được áp dụng trong nhiều trường hợp. Vì vậy, cần nghiên cứu các thuật toán huấn luyện hợp lý để xây dựng mô hình mạng nơ-ron với mục tiêu huấn luyện các tính năng hoặc mẫu từ dữ liệu đầu vào để có thể tìm được tập hợp các tham số của mô hình bên trong, để tối ưu hóa độ chính xác của mô hình. Trong bài báo này, tác giả sử dụng ba thuật toán: Levenberg-Marquardt (LM), Bayesian Regularization (BR) và lan truyền ngược Scaled Conjugate Gradient (SCG) để so sánh và đánh giá hiệu quả trong các mô hình ANN.

- Thuật toán Levenberg - Marquardt (LM) được phát triển độc

lập bởi Kenneth Levenberg [13] và Donald Marquardt [14], cung cấp một giải pháp số cho vấn đề tối thiểu hóa một hàm phi tuyến. Thuật toán LM kết hợp giữa phương pháp gradient descent và thuật toán Gauss - Newton. Thuật toán LM giải quyết các vấn đề tồn tại trong cả 2 phương pháp trên để đào tạo mạng nơ-ron, bằng sự kết hợp của hai thuật toán đó [15]. Số lượng nơ ron ẩn được chọn theo phương pháp thực nghiệm. Bắt đầu từ mạng chỉ có 1 nơ ron ẩn và tạo ra 50 mạng ngẫu nhiên với số lượng nơ ron ẩn đó. Tất cả các mạng được huấn luyện với các bộ số liệu để chọn ra mạng có sai số thấp nhất. Nếu sai số thấp nhất vẫn cao, số lượng nơ ron ẩn lại được tăng thêm 1. Để tránh hiệu ứng học quá khớp, ta chọn mạng có số lượng nơ ron ẩn thấp nhất có thể (tức là mạng đơn giản nhất có thể), mà vẫn đảm bảo được sai số học và sai số kiểm tra nhỏ (trong bài báo này các mô hình được lựa chọn sao cho sai số tương đối trung bình của các thông số không quá 5%).

- Thuật toán Bayesian Regularization (BR) là một thuật toán đào tạo mạng nơ-ron nhân tạo, điều chỉnh các giá trị trọng số và khúc xạ dựa trên tối ưu hóa LM [16]. Thuật toán này giảm thiểu sự kết hợp của bình phương lỗi và trọng số, sau đó tìm ra kết hợp chính xác để tạo ra một mạng tốt. Quá trình này được gọi là chính quy hóa Bayesian. Mạng nơ-ron chính quy Bayesian đưa trọng số mạng vào hàm mục tiêu huấn luyện.

- Thuật toán Scaled Conjugate Gradient (SCG) được phát triển bởi Moller [17], dựa trên các hướng liên hợp, nhưng thuật toán này không thực hiện tìm kiếm theo dòng ở mỗi lần lặp, không giống như các thuật toán độ dốc liên hợp khác yêu cầu tìm kiếm theo dòng ở mỗi lần lặp. Làm cho hệ thống tốn kém về mặt tính toán. SCG được thiết kế để tránh mất thời gian tìm kiếm dòng. Đây là một hàm huấn luyện mạng cập nhật các giá trị trọng số và độ lệch theo phương pháp độ dốc liên hợp được chia tỷ lệ. Nó có thể huấn luyện bất kỳ mạng nào miễn là trọng số, đầu vào và các hàm truyền của nó có các hàm đạo hàm. Trong thuật toán SCG, kích thước bước là một hàm xấp xỉ bậc hai của hàm lỗi, làm cho nó mạnh hơn và không phụ thuộc vào các tham số do người dùng xác định.

Quá trình huấn luyện theo các thuật toán này, tác giả sử dụng phần mềm Matlab cùng với thư viện Neural Network Toolbox [18].

- Đánh giá khả năng dự báo của mô hình:

Trong nghiên cứu này, hai tiêu chí thống kê được sử dụng để đánh giá độ chính xác của mô hình ANN để xuất, đó là hệ số xác định (R^2) và sai số tuyệt đối trung bình (MSE). Hệ số R^2 dùng để ước tính mối tương quan giữa thực tế và kết quả dự đoán, giá trị của R^2 nằm trong khoảng (0; 1). MSE đo mức độ sai số trung bình giữa kết quả đầu ra thực tế và dự đoán. Kết quả giá trị MSE càng gần 0 và giá trị R^2 càng gần 1 thì thể hiện độ chính xác càng cao của mô hình đào tạo.

- Cơ sở dữ liệu:

Để xây dựng được mô hình dữ liệu phục vụ huấn luyện mạng, chương trình **SYM** được sử dụng để tính toán tần số dao động riêng của kết cấu theo sự thay đổi của các tham số kết cấu (như sơ đồ tính, kích thước kết cấu, kích thước tiết diện, chiều sâu ngàm tương đương, ...), chương trình đã được kiểm chứng trong nghiên cứu trước đây [11].

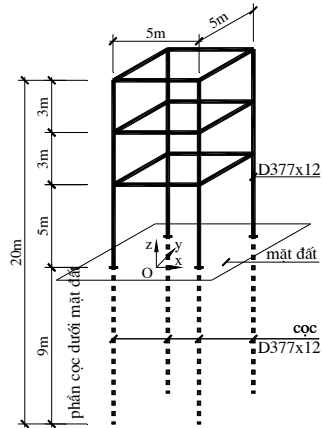
3.4. Xây dựng mô hình ANN dự đoán tần số dao động riêng

Xây dựng mô hình ANN với các kỹ thuật đã được trình bày để dự đoán tần số dao động riêng kết cấu khung không gian (hình 3) theo sự thay đổi chiều sâu ngàm của các cọc.

* Số liệu xuất phát.

- Kết cấu làm bằng thép ống (phần cọc, phần thân kết cấu), tiết diện ngang các thanh (trên mặt đất và đoạn cọc trong đất) $\phi 377 \times 12 \text{mm}$; mô đun đàn hồi của thép: $E = 2.1.10^7 \text{ T/m}^2$; trọng

lượng riêng thép: $\gamma = \rho / g = 7,8 \text{ T/m}^3$.



Hình 3. Mô hình thực hệ kết cấu khung không gian của tính toán bằng số

* Cơ sở dữ liệu đầu vào (input files): $I_{tt} = [I_{tt,1} \ I_{tt,2} \ I_{tt,3} \ I_{tt,4}]^T$

Đây là tổ hợp các trường hợp chiều sâu ngàm tương đương của các cọc, kết cấu có 04 cọc do đó véc tơ input có 04 giá trị chiều sâu ngàm.

Theo [2], chiều sâu ngàm tương đương có thể được xác định: $I_{tt} = (3,5 - 8,5) \cdot d$, trong đó d là đường kính cọc. Trong bài toán này, chiều sâu ngàm tương đương có khoảng dự đoán là: $I_{tt} = 1,15 \div 3,15 \text{m}$

* Cơ sở dữ liệu đầu ra (output files): $\Omega_{tt} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \ \omega_4]^T$

Gồm 04 tần số dao động riêng đầu tiên của kết cấu theo các trạng thái (từng tổ hợp chiều sâu ngàm tương đương). Trong bài báo này, cơ sở dữ liệu đầu ra (output) được tính toán bằng chương trình tính dao động riêng kết cấu **SYM**.

Để không mất tính tổng quát, ta coi các cọc có chiều sâu ngàm tương đương khác nhau. Với bước thay đổi chiều sâu ngàm của mỗi cọc là 0,5m, sẽ có 05 giá trị chiều sâu ngàm tương đương của mỗi cọc, do đó số trường hợp tính toán là $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ trường hợp, tương ứng có 625 mẫu input và 625 output.

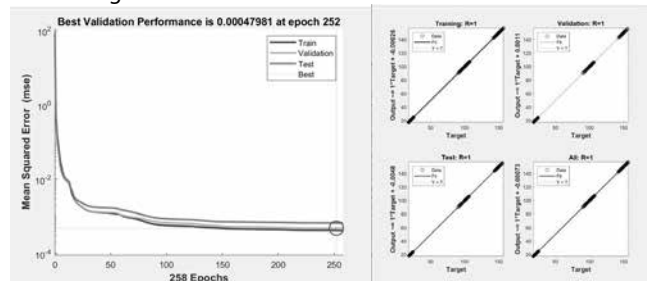
Lần lượt sử dụng ANN theo các kỹ thuật Levenberg - Marquardt, Bayesian Regularization, Scaled Conjugate Gradient, với 10 neural, 04 đầu vào, 04 đầu ra; với 625 mẫu, trong đó sử dụng 70% (437 mẫu) để huấn luyện, 94 mẫu để kiểm tra.

3.5. Kết quả tính toán số

3.5.1. Với thuật toán Levenberg - Marquardt

Với kết quả $MSE = 2,4.10^{-4}$, $R^2 = 9,99999.10^{-1} \approx 1$, có thể khẳng định mô hình ANN với kỹ thuật Levenberg - Marquardt đã được xây dựng là đáng tin cậy, kết quả được thể hiện trên hình 4.

* Trường hợp các giá trị kiểm tra trùng với giá trị đầu vào (input), ta có thể thấy, giá trị dự đoán (tần số) sai khác không quá 1,58% so với giá trị đầu ra (output) - tức là giá trị tính toán tần số theo chương trình tính.



Hình 4. Kết quả mô hình ANN

Bảng 1. Kết quả dự đoán tần số dao động riêng

Giá trị Input (m)				Giá trị Output (rad/s)				Giá trị dự đoán (rad/s)			
L1	L2	L3	L4	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
-5,500	-5,750	-6,000	-6,150	15,6233	88,3055	96,1838	135,6879	15,8098	88,5899	96,2392	135,7584
-5,500	-5,500	-6,000	-6,000	15,8869	88,3133	96,8028	136,4908	16,0686	88,6229	96,8959	136,6138
-4,400	-4,400	-4,900	-4,900	19,0092	91,9963	100,5567	145,8017	18,9984	91,9723	100,5477	145,7882
-4,200	-4,400	-4,800	-5,000	19,1729	92,4766	100,4921	146,1810	19,1728	92,4613	100,4850	146,1717

* Trường hợp các giá trị kiểm tra không trùng với giá trị đầu vào (input) - tức là không có trong dữ liệu huấn luyện, kể cả có thể nằm ngoài khoảng dự đoán ($l_{tt} = 1,15 \div 3,15m$) - được thể hiện trong bảng 1, theo đó giá trị dự đoán (tần số) sai khác không quá 1,19% so với giá trị tính toán theo chương trình tính kết cấu **SYM**.

3.5.2. Với thuật toán Bayesian Regularization

Kết quả $MSE = 1,32 \cdot 10^{-4}$, $R^2 = 9,99999 \cdot 10^{-1} \approx 1$, có thể khẳng định mô hình ANN với kỹ thuật Bayesian Regularization đã được xây dựng là khả thi, đảm bảo độ tin cậy.

3.5.3. Với thuật toán Scaled Conjugate Gradient

Kết quả $MSE = 4,6 \cdot 10^{-3}$, $R^2 = 9,99999 \cdot 10^{-1} \approx 1$, có thể khẳng định mô hình ANN với kỹ thuật Scaled Conjugate Gradient đã được xây dựng là khả thi, đảm bảo độ tin cậy.

NHẬN XÉT:

Trong nghiên cứu này, ứng dụng mô hình ANN với các kỹ thuật được sử dụng (Levenberg - Marquardt, Bayesian Regularization, Scaled Conjugate Gradient) để dự đoán tần số dao động riêng của hệ kết cấu khung không gian dựa trên các tập số liệu đầu vào (input) và số liệu đầu ra (output), dữ liệu đầu vào là các chiều sâu ngâm tương đương của cọc. Kết quả nghiên cứu cho thấy mô hình ANN với các thuật toán được sử dụng (Levenberg - Marquardt, Bayesian Regularization, Scaled Conjugate Gradient) có thể dự đoán gần như chính xác tần số dao động riêng của hệ kết cấu khung không gian (sai số không quá 1,58%), đảm bảo tính khả thi, độ tin cậy, trong đó kỹ thuật BR có nổi trội hơn về MSE. Khi có đầy đủ dữ liệu, có thể dự đoán chính xác tần số dao động riêng của hệ kết cấu khung không gian mà không cần phải sử dụng các chương trình toán tần số dao động riêng hoặc phần mềm chuyên dụng về kết cấu công trình) nào khác. Với các kết cấu phức tạp, quy mô bài toán lớn, tham số bị ảnh hưởng bởi nhiều yếu tố thay đổi trong quá trình khai thác, công trình ở khu vực có điều kiện khó khăn về thời tiết, khí hậu và điều kiện cơ sở hạ tầng công nghệ thông tin, phần mềm chuyên dùng thì đây là yếu tố hết sức quan trọng và có ý nghĩa.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Tiêu chuẩn ngành 20 TCN 21:1986 về Móng cọc - Tiêu chuẩn thiết kế.
2. American Petroleum Institute (2003), Recommended Practice for Planning, Designing and Constructing Fixed Offshore Platforms - Working Stress Design (Washington: API Publications).
3. Mansour, M. Y., Dicleli, M., Lee, J. Y., Zhang, J. (2004), Predicting the shear strength of reinforced concrete beams using artificial neural networks, Engineering Structures,

26(6):781-799.

4. Lai, S., Serra, M. (1997), Concrete strength prediction by means of neural network, Construction and Building Materials, 11(2):93-98.
5. Cook, R., Han, T., Childers, A., Ryckman, C., Khayat, K., Ma, H., Huang, J., Kumar, A. (2021), Machine learning for high-fidelity prediction of cement hydration kinetics in blended systems, Materials & Design, 208:109920.
6. Elshafey, A. A., Dawood, N., Marzouk, H., Haddara, M. (2013), Crack width in concrete using artificial neural networks, Engineering Structures, 52:676-686.
7. Maity, D., Saha, A. (2004). Damage assessment in structure from changes in static parameter using neural networks, Sadhana, 29(3):315-327.
8. Tran Ngoc, H., Khatir, S., Roeck, G. D., Bui Tien, T., Wahab, M. A. (2019), An efficient artificial neural network for damage detection in bridges and beam-like structures by improving training parameters using cuckoo search algorithm, Engineering Structures, 199:109637.
9. Đỗ Anh Tú, Nguyễn Minh Hiếu, Trần Đức Tâm, Nguyễn Thị Hà Ly (2022), Dự báo khả năng nứt nhiệt trong bê tông tuổi sớm trong kết cấu trụ cầu sử dụng mạng nơ ron nhân tạo, Tạp chí Khoa học CNXD, ĐHXDHN, 16(5V), 139-150.
10. Nguyễn Thùy Anh, Lý Hải Bằng, Nguyễn Trọng Anh Minh, Nghiên cứu tối ưu số nơ ron trong mạng thần kinh nhân tạo để dự đoán lực liên kết giữa tấp FRP với bê tông (2021), Khoa học công nghệ, số 1+2.
11. Nguyễn Xuân Bằng (2013), Nhận dạng liên kết trên bề mặt tiếp xúc giữa móng cọc và nền đàn hồi, Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Học viện KTQS.
12. Bathe K.J. and Wilson E.L. (1996), Finite element method, Prentice-Hall International, Inc.
13. Levenberg, K. (1944), A method for the solution of certain non-linear problems in least squares, Quarterly of Applied Mathematics, 2(2):164-168.
14. Marquardt, D. W. (1963), An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 11(2):431-441.
15. Gavin, H. P. (2019), The Levenberg-Marquardt algorithm for nonlinear least squares curve-fitting problems, Department of Civil and Environmental Engineering, Duke University, 19.
16. MacKay, D. J. C. (1992), Bayesian Interpolation, Neural Computation, 4(3):415-447.
17. Møller, M. F. (1993), A scaled conjugate gradient algorithm for fast supervised learning. Neural Networks, 6(4):525-533.