

# ỔN ĐỊNH CỘT CÓ MẶT CẮT THAY ĐỔI TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN ĐỘ CỨNG

## STABILITY OF THE COLUMN WITH CHANGED LINEAR CROSS SECTIONS BY MATRIX STIFFNESS METHOD

Nguyễn Đăng Diễm

Đại học Giao thông vận tải – Phân hiệu tại Thành phố Hồ Chí Minh

**Tóm tắt:** Trong bài báo tác giả xây dựng ma trận độ cứng của phần tử chịu nén uốn có mặt cắt ngang thay đổi theo quy luật bậc nhất, hàm chuyển vị được lựa chọn là đa thức bậc ba thỏa mãn điều kiện biên của bài toán. Ma trận độ cứng của phần tử chịu nén uốn đồng thời được xem xét bao gồm: Ma trận độ cứng của phần tử thanh đàn hồi tuyến tính thông thường có mặt cắt ngang thay đổi tuyến tính và ma trận độ cứng của phần tử thanh trong đó có xét đến ảnh hưởng của lực dọc  $P$  đến độ cứng chống uốn của phần tử. Tải trọng  $P$  tác dụng ở hai đầu của phần tử. Ma trận độ cứng tổng thể được xác định bằng phương pháp chỉ số, tải trọng tới hạn được xác định bằng bài toán trị riêng của ma trận độ cứng tổng thể.

**Từ khóa:** Ổn định, cột chịu nén, mặt cắt thay đổi, lực tới hạn, ma trận độ cứng.

**Chỉ số phân loại:** 2.4

**Abstract:** In the paper, the author constructed the stiffness matrix of bending compressive elements whose cross-section changes according to the first-order rule, the displacement function selected as the third polynomial satisfying the boundary conditions of the problem. The stiffness matrix of simultaneously compressible bending elements includes: The hardness matrix of a common linear elastic bar element has a linear change cross-section and a stiffness matrix of the inner rod element. it takes into account the effect of longitudinal force  $P$  on the element flexural stiffness. Payload  $P$  acts at both ends of the element. The overall hardness matrix is determined by the index method, the critical load is determined by the specific value problem of the overall hardness matrix.

**Keywords:** Stability, column compression, changed linear cross-sections, critical load, matrix stiffness method.

**Classification number:** 2.4

### 1. Giới thiệu

Trong tính toán thiết kế công trình, người kỹ sư cần quan tâm đến độ bền và độ ổn định của kết cấu. Tính toán ổn định của kết cấu hay xác định tải trọng tới hạn đã được giải quyết bởi các tác giả khác nhau, phải kể đến bài toán Ole khi xác định tải trọng tới hạn của thanh có mặt cắt không đổi liên kết khớp ở hai đầu. Có rất nhiều phương pháp tính toán ổn định của cột chịu nén. Theo [3] các phương pháp tính toán ổn định cột chịu nén được chia thành ba nhóm: Phương pháp tĩnh học, phương pháp năng lượng và phương pháp động lực học. Trong mỗi nhóm phương pháp lại có các phương pháp khác nhau, phương pháp ma trận độ cứng nằm trong nhóm các phương pháp tĩnh.

Tính toán ổn định bằng phương pháp ma trận độ cứng đã được các tác giả tập trung nghiên cứu và giải quyết theo hướng khác nhau. Theo [2] tác giả đã giải quyết các bài

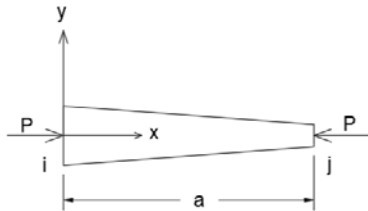
toán ổn định của cột với các dạng liên kết khác nhau với mặt cắt không thay đổi. Theo [1] tác giả đã xác định lực tới hạn của cột có mặt cắt thay đổi nhưng theo phương pháp năng lượng, tác giả xử lý bài toán theo phương pháp ngược, tìm hàm chuyển vị trước bằng phương pháp bình phương tối thiểu, khi xác định được hàm chuyển vị, tác giả cho xác định lực tới hạn bằng phương pháp năng lượng. Như vậy tính toán ổn định của cột có mặt cắt thay đổi theo phương pháp ma trận độ cứng cần tiếp tục nghiên cứu.

Trong bài báo này tác giả đi xây dựng ma trận độ cứng của phần tử chịu nén uốn đồng thời có mặt cắt ngang thay đổi tuyến tính, ma trận độ cứng của phần tử được chia thành hai phần: Phần 1 là ma trận độ cứng của phần tử thanh đàn hồi tuyến tính thông thường có mặt cắt ngang thay đổi tuyến tính và phần 2 là ma trận độ cứng của phần tử thanh trong đó có xét đến ảnh hưởng của lực dọc  $P$  đến độ cứng chống uốn của phần tử.

Tải trọng  $P$  tác dụng ở hai đầu của phần tử. Ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu được xây dựng trên ma trận độ cứng tổng thể thuộc phần tử theo phương pháp chỉ số. Giá trị lực tới hạn được xác định bằng bài toán giá trị riêng của ma trận độ cứng tổng thể. Khi xây dựng ma trận độ cứng tác giả lựa chọn hàm chuyển vị là đa thức bậc ba đầy đủ, thỏa mãn điều kiện biên của bài toán.

## 2. Xây dựng ma trận độ cứng phần tử chịu nén uốn có mặt cắt ngang thay đổi tuyến tính.

Xét một phần tử chịu uốn có mặt cắt ngang thay đổi tuyến tính như hình 1. Phần tử gồm hai nút ở hai đầu  $i$  và  $j$ , chiều dài phần tử là  $a$ . Hàm chuyển vị được lựa chọn là đa thức bậc 3 đầy đủ (1) và mô men quán tính được thay đổi theo (2).

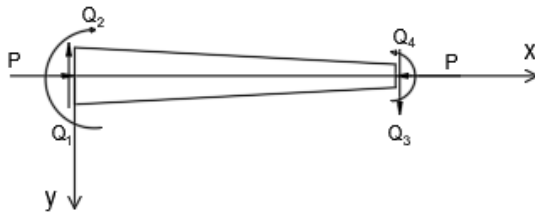


Hình 1. Phần tử có mặt cắt ngang thay đổi tuyến tính.

$$y = A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3 \quad (1)$$

$$I = \left(1 - \frac{x}{a}\right)I_i + \frac{x}{a}I_j \quad (2)$$

Xét một phần tử có mặt cắt ngang thay đổi tuyến tính như hình 2, chịu tác dụng của tải trọng  $P$ , véc tơ tải trọng  $\{Q\}$ , véc tơ chuyển vị  $\{u\}$ .



Hình 2. Phần tử chịu nén uốn.

Thế năng biến dạng đàn hồi của phần tử,  $U$ , bỏ qua biến dạng trượt và biến dạng dọc được xác định theo (3), sử dụng phương trình vi phân đường đàn hồi (4),  $U$  được xác định theo (5).

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{M^2}{EI} dx \quad (3)$$

$$y'' = -\frac{M}{EI} \quad (4)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a EI(y'')^2 dx \quad (5)$$

Phần tử được giả định chịu tải trọng theo hai giai đoạn, giai đoạn đầu chịu tải trọng dọc trục  $P$ , giai đoạn hai phần tử chịu uốn dưới tác dụng của  $\{Q\}$  trong khi tải trọng  $P$  không đổi, công của ngoại lực  $T_P$  được xác định theo (6), công của ngoại lực  $T_P$  bằng thế năng biến dạng đàn hồi  $U$ , chú ý ở (7), ta có quan hệ như (8).

$$T_P = \frac{1}{2} \{u\}^T \{Q\} + \frac{P}{2} \int_0^a (y')^2 dx \quad (6)$$

$$\{Q\} = [k] \{u\} \quad (7)$$

$$\{u\}^T [k] \{u\} = \int_0^a EI (y'')^2 dx - P \int_0^a (y')^2 dx \quad (8)$$

Hàm chuyển vị được lựa chọn theo (1) thỏa mãn điều kiện chuyển vị của phần tử tại nút  $i$  ( $x = 0$ ) và nút  $j$  ( $x = a$ ) được viết lại theo (9), (10), (11), (12), (13). Thay (9) vào (8) ta có ma trận độ cứng  $[k]$  được xác định theo (14), (15).

$$y = [N] \times \{u\} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \times \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$N_1 = -\frac{3x^2}{a^2} + \frac{2x^3}{a^3} + 1 \quad (10)$$

$$N_2 = x - \frac{2x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2} \quad (11)$$

$$N_3 = -\frac{2x^3}{a^3} + \frac{3x^2}{a^2} \quad (12)$$

$$N_4 = \frac{x^3}{a^2} - \frac{x^2}{a} \quad (13)$$

$$[k] = \int_0^a EI [N'']^T [N''] dx - P \int_0^a [N']^T [N'] dx \quad (14)$$

$$[k] = E \begin{bmatrix} \frac{6(I_i + I_j)}{a^3} & \frac{4I_i + 2I_j}{a^2} & -\frac{6(I_i + I_j)}{a^3} & \frac{2I_i + 4I_j}{a^2} \\ \frac{4I_i + 2I_j}{a^2} & \frac{3I_i + I_j}{a} & -\frac{4I_i + 2I_j}{a^2} & \frac{I_i + I_j}{a} \\ \frac{6(I_i + I_j)}{a^3} & -\frac{4I_i + 2I_j}{a^2} & \frac{6(I_i + I_j)}{a^3} & -\frac{2I_i + 4I_j}{a^2} \\ \frac{2I_i + 4I_j}{a^2} & \frac{I_i + I_j}{a} & -\frac{2I_i + 4I_j}{a^2} & \frac{I_i + 3I_j}{a} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$-P \begin{bmatrix} \frac{6}{5a} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5a} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{15}{30} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ \frac{6}{5a} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5a} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{15}{30} \end{bmatrix}$$

### 3. Ví dụ tính toán minh họa

Trình tự tính toán ổn định (xác định tải trọng tới hạn) bằng phương pháp ma trận độ cứng cơ bản bao gồm các bước sau đây:

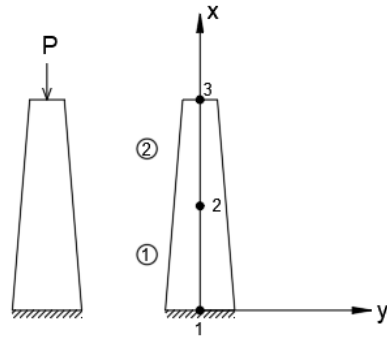
-Bước 1: Phân chia phần tử, xác định trục phần tử và trục tổng thể của toàn kết cấu;

-Bước 2: Lựa chọn hàm chuyển vị xác định ma trận độ cứng của phần tử trong hệ tọa độ phần tử;

-Bước 3: Xác định ma trận độ cứng của phần tử trong hệ tọa độ kết cấu, xác định ma trận độ cứng của toàn kết cấu bằng phương pháp chỉ số;

-Bước 4: Giải bài toán tìm giá trị riêng của ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu, từ đó xác định được tải trọng tới hạn.

Để thuận lợi cho việc so sánh và đánh giá kết quả tính toán, trong nghiên cứu này tác giả tính toán lại bài toán ổn định của thanh có mặt cắt thay đổi tuyến tính bằng phương pháp ma trận độ cứng đã được [1] giải quyết bằng phương pháp ngược. Xét một thanh như hình 3 có chiều dài  $L = 2 \text{ m}$ , liên kết một đầu ngàm một đầu tự do, mặt cắt ngang hình tròn đường kính  $d$  thay đổi  $d_1 = 0.04 \text{ m}$ ,  $d_2 = 0.02 \text{ m}$ , làm bằng vật liệu thép  $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ .



Hình 3. Phân chia phần tử.

Kết cấu được chia thành hai phần tử đánh số thứ tự 1, 2 và 3 nút đánh số thứ tự 1,2,3. Sử dụng kết quả (16) xác định ma trận độ cứng của phần tử 1 và phần tử 2 trong hệ tọa độ phần tử:

Ma trận độ cứng của phần tử số 1, sử dụng ma trận độ cứng số (15) với các thông số  $E = 2.10^8 \text{ kN/m}^2$ , chiều dài phần tử  $a = 1 \text{ m}$ , mô men quán tính  $I_i = 0.05d^4 = 128.10^{-9} \text{ m}^4$ , và  $I_j = 405.10^{-10} \text{ m}^4$  ta được ma trận số (16).

$$[k]_1 = \begin{bmatrix} 202.2 & 118.6 & -202.2 & 83.6 \\ 118.6 & 84.9 & -118.6 & 33.7 \\ -202.2 & -118.6 & 202.2 & -83.6 \\ 83.6 & 33.7 & -83.6 & 49.9 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$-P \begin{bmatrix} 1.2 & 0.1 & -1.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.13 & -0.1 & -0.03 \\ -1.2 & -0.1 & 1.2 & -0.1 \\ 0.1 & -0.03 & -0.1 & 0.13 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ cứng của phần tử số 2 sử dụng ma trận độ cứng số (15) với các thông số  $E = 2.10^8 \text{ kN/m}^2$ , chiều dài phần tử  $a = 1 \text{ m}$ , mô men quán tính  $I_i = 405.10^{-10} \text{ m}^4$ , và  $I_j = 80.10^{-10} \text{ m}^4$  ta được ma trận số (17):

$$[k]_2 = \begin{bmatrix} 58.2 & 35.6 & -58.2 & 22.6 \\ 35.6 & 25.9 & -35.6 & 9.7 \\ -58.2 & -35.6 & 58.2 & -22.6 \\ 22.6 & 9.7 & -22.6 & 12.9 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$-P \begin{bmatrix} 1.2 & 0.1 & -1.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.13 & -0.1 & -0.03 \\ -1.2 & -0.1 & 1.2 & -0.1 \\ 0.1 & -0.03 & -0.1 & 0.13 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ cứng của toàn kết cấu sau khi xử lý điều kiện biên tại nút 1 có tất cả các thành phần chuyển vị bằng 0, ghép nối các

thành phần chuyển vị của phần tử 1 và phần tử 2 ta có ma trận số 18:

$$[K] = \begin{bmatrix} 260.4 & -48 & -58.2 & 22.6 \\ -48 & 75.8 & -35.6 & 9.7 \\ -58.2 & -35.6 & 58.2 & -22.6 \\ 22.6 & 9.7 & -22.6 & 12.9 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$-P = \begin{bmatrix} 2.4 & 0 & -1.2 & 0.1 \\ 0 & 0.267 & -0.1 & -0.03 \\ -1.2 & -0.1 & 1.2 & -0.1 \\ 0.1 & -0.03 & -0.1 & 0.13 \end{bmatrix}$$

Giải phương trình  $Det[K] = 0$  của ma trận số 18, xác định được tải trọng tới hạn  $P_{cr} = 7.414 \text{ kN}$ .

**Bảng 1.** So sánh kết quả tính toán.

Tải trọng tới hạn	Ma trận độ cứng	Theo [1]	Chênh lệch
$P_{cr}$	7.414 kN	6.86 kN	8.07%

Sự chênh lệch giá trị lực tới hạn bằng phương pháp ma trận độ cứng và phương pháp năng lượng theo tác giả [1] là do khi lựa chọn hàm chuyển vị theo [1] lựa chọn là hàm đa thức bậc 5 đầy đủ, trong bài báo này tác giả lựa chọn hàm chuyển vị là đa thức bậc 3 đầy đủ. Để tăng độ chính xác khi tính toán có thể phân chia với số lượng phần tử nhiều hơn dẫn đến khối lượng tính toán lớn nhưng hoàn toàn giải quyết được với sự trợ giúp của máy tính.

#### 4. Kết luận

Bài báo đã xây dựng được ma trận độ cứng của phần tử chịu nén uốn có mặt cắt ngang thay đổi tuyến tính, sử dụng phương pháp ma trận độ cứng, giải bài toán tìm giá trị riêng để xác định tải trọng tới hạn.

Kết quả tính toán ổn định được đối chiếu so sánh với công bố khoa học trước. Kết quả nghiên cứu có thể được sử dụng làm tài liệu tham khảo tốt cho các kỹ sư khi tính toán ổn định công trình.

Có sự chênh lệch kết quả tính toán theo [1] và phương pháp ma trận độ cứng. Ngoài việc tăng số lượng phần tử tính toán, tác giả đề xuất hướng nghiên cứu tiếp theo sử dụng phần tử bậc cao để xây dựng ma trận độ cứng của phần tử chịu nén uốn có mặt cắt ngang thay đổi tuyến tính □

#### Tài liệu tham khảo

- [1] Lương Xuân Bình, *Tính ổn định ổn định thanh có mặt cắt thay đổi*, Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải, Số 24 -11/2008;
- [2] Vũ Hoàng Hải, *Nghiên cứu ổn định của thanh bằng phương pháp phần tử hữu hạn*, Luận văn Thạc sĩ Kỹ thuật, Đại học dân lập Hải Phòng 2017;
- [3] Lều Thọ Trình, Đỗ Văn Bình (2005), *Ổn định công trình*, NXB khoa học kỹ thuật;
- [4] Alexander Chajes, *Principales of structural stability theory*, University of Massachusetts;
- [5] W.F.Chen, *Structura stability theory and impenmentation*, Professor and Head of Structural Engineering School of Civil Engineering Purdue University West Lafayette, Indiana;

Ngày nhận bài: 21/4/2020

Ngày chuyển phản biện: 24/5/2020

Ngày hoàn thành sửa bài: 15/5/2020

Ngày chấp nhận đăng: 22/5/2020