Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2019.008

ỔN ĐỊNH HÖLDER CỦA BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU BANG-BANG CHO PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG ELLIPTIC NỬA TUYẾN TÍNH

Trương Gia Đại
Lớp Cao học Toán Khóa 23, ngành Toán Giải tích, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ
**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Trương Gia Đại (email: tgiadai@gmail.com)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 11/06/2018
Ngày nhận bài sửa: 24/08/2018
Ngày duyệt đăng: 27/02/2019

Title:
Hölder stability for bang-bang optimal control problems of semilinear elliptic partial differential equations

Từ khóa:
Điều khiển bang-bang, điều kiện tối ưu bậc hai, phương trình elliptic nửa tuyến tính, sự ổn định Hölder

Keywords:
Bang-bang control, hölder stability, second-order optimality condition, semilinear elliptic equation

ABSTRACT

This paper studies Hölder stability of a class of bang-bang optimal control problems governed by semilinear elliptic partial differential equations. A new second-order sufficient optimality condition for the class of bang-bang optimal control problems is establish. This sufficient optimality condition is used to prove some new results on Hölder stability of the class of control problems under consideration.

TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu sự ổn định Hölder của một lớp các bài toán điều khiển tối ưu bang-bang cho các phương trình vi phân đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính. Một điều kiện đủ tối ưu bậc hai mới cho lớp bài toán điều khiển tối ưu bang-bang được thiết lập. Điều kiện đủ tối ưu này được sử dụng để chứng minh các kết quả mới về tính ổn định Hölder cho lớp bài toán điều khiển đang khảo sát.

Trích dẫn: Trương Gia Đại, 2019. Ổn định Hölder của bài toán điều khiển tối ưu bang-bang cho phương trình đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 55(1A): 59-65.

1 GIỚI THIỆU

Hiện nay các bài toán điều khiển tối ưu bang-bang cho các phương trình vi phân thường đã được nghiên cứu rộng rãi. Tuy nhiên, các kết quả liên quan đến bài toán điều khiển tối ưu bang-bang cho các phương trình vi phân đạo hàm riêng còn khá hạn chế. Một số kết quả đầu tiên trong hướng nghiên cứu này như: Casas (2012), Casas*et al.* (2017), Pörner and Wachsmuth (2016), Pörner and Wachsmuth (2017). Tiếp nối các kết quả nghiên cứu của Casas (2012), Casas *et al.* (2017), trong bài báo này nghiên cứu sự ổn định nghiệm của một lớp các bài toán điều khiển tối ưu bang-bang cho các phương trình vi phân đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính được cho dưới dạng

$$\begin{cases} \text{Min } \; J(u) = \int_\Omega L\big(x, y_u(x)\big)dx \\ \text{thỏa đ.k. } \; \alpha(x) \le u(x) \le \beta(x) \; \text{ với h.h. } x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó u là biến điều khiển và trạng thái y_u là nghiệm của bài toán Dirichlet sau

$$\begin{cases} Ay + f(x,y) = u \; \text{ trong } \Omega \\ \qquad\qquad\quad y = 0 \; \text{ trên } \Gamma. \end{cases} \tag{1.2}$$

Trong trường hợp tổng quát các nghiệm địa phương $\bar{u}$ của bài toán (1.1) thường thỏa mãn tính chất *bang-bang* sau đây

$$\bar{u}(x) \in \{\alpha(x), \beta(x)\}, \quad \text{với h.h. } x \in \Omega,$$

nên bài toán (1.1) còn được gọi là bài toán bang-bang.

Mục tiêu chính của bài báo này là khảo sát sự ổn định Hölder cho các nghiệm địa phương của bài toán điều khiển tối ưu bang-bang (1.1) dưới tác động của nhiễu. Để thu được các kết quả ổn định nghiệm cho bài toán (1.1), một điều kiện đủ tối ưu bậc hai cho bài toán (1.1) đã được thiết lập, đồng thời cũng phát biểu lại một kết quả rằng bài toán điều khiển tối ưu nhiễu luôn có nghiệm toàn cục. Các kết quả này được sử dụng để chứng minh kết quả chính của bài báo về sự ổn định Hölder cho các nghiệm địa phương của bài toán (1.1).

Phần còn lại của bài báo được bố cục như sau: Mục 2 phát biểu các giả thiết căn bản trong lý thuyết điều khiển tối ưu cần thiết cho bài báo này và nhắc lại một số kết quả đã biết về điều khiển tối ưu cho các phương trình vi phân đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính; Mục 3 nhắc lại các điều kiện cần tối ưu bậc nhất và thiết lập mới một điều kiện đủ tối ưu bậc hai cho bài toán (1.1); Mục 4 tập trung vào kết quả chính của bài báo bao gồm các đánh giá Hölder cho các nghiệm toàn cục của bài toán nhiễu so với nghiệm địa phương đang xét của bài toán (1.1); Kết luận và hướng phát triển được nêu trong Mục 5 của bài báo.

2 CÁC GIẢ THIẾT CĂN BẢN VÀ KẾT QUẢ BỔ TRỢ

Xét tập hợp $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ với $N \in \{1,2,3\}$ và các hàm $\alpha, \beta \in L^\infty(\Omega)$ thỏa điều kiện $\alpha(x) < \beta(x)$ với hầu hết (viết tắt là h.h.) $x \in \Omega$. Hơn nữa, các hàm $L, f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm Carathéodory thuộc lớp C^2 tương ứng với biến thứ hai và thỏa mãn các giả thiết dưới đây:

(A1) $f(\cdot,0) \in L^{p_0}(\Omega)$ với $p_0 > N/2$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \geq 0 \text{ với h.h. } x \in \Omega,$$

và với mọi $M > 0$ tồn tại hằng số $C_{f,M} > 0$ sao cho

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right| \leq C_{f,M} \text{ với h.h. } x \in \Omega \text{ và } |y| \leq M.$$

Với mỗi $M > 0$ và $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ phụ thuộc vào M và ε sao cho

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y_1)\right| < \varepsilon \text{ nếu } |y_1|, |y_2| \leq M, |y_2 - y_1| \leq \delta, \text{ và với h.h. } x \in \Omega.$$

(A2) $L(\cdot,0) \in L^1(\Omega)$ và với mọi $M > 0$ tồn tại hằng số $C_{L,M} > 0$ và hàm $\psi_M \in L^{p_0}(\Omega)$ sao cho với mọi $|y| \leq M$ và với hầu hết $x \in \Omega$,

$$\left|\frac{\partial L}{\partial y}(x,y)\right| \leq \psi_M(x), \quad \left|\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y)\right| \leq C_{L,M}.$$

Với mỗi $M > 0$ và $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ phụ thuộc vào M và ε sao cho

$$\left|\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y_2) - \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y_1)\right| < \varepsilon \text{ nếu } |y_1|, |y_2| \leq M, |y_2 - y_1| \leq \delta, \text{ và với h.h. } x \in \Omega.$$

(A3) Tập Ω là một miền mở và bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ với biên Lipschitz Γ (xem định nghĩa biên Lipschitz trong Tröltzsch (2010)), và A là toán tử elliptic bậc hai dưới dạng

$$Ay(x) = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_j}\left(a_{ij}(x)\partial_{x_i} y(x)\right),$$

trong đó các hàm hệ số $a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$ thỏa mãn điều kiện: tồn tại $\lambda_A > 0$ sao cho

$$\lambda_A |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ với h.h. } x \in \Omega$$

Tập các điều khiển chấp nhận được sẽ được ký hiệu bởi

$$\mathcal{U}_{ad} := \{u \in L^\infty(\Omega) | \ \alpha(x) \leq u(x) \leq \beta(x) \text{ với h.h. } x \in \Omega\}.$$

Rõ ràng ta có $\mathcal{U}_{ad} \neq \emptyset$. Cho $p \in [1, \infty]$, ký hiệu $\bar{B}^p_\varepsilon(\bar{u}) := \{v \in L^p(\Omega) | \ \|v - \bar{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon\}$ là quả cầu đóng trong không gian $L^p(\Omega)$ có tâm tại $\bar{u} \in L^p(\Omega)$ và bán kính $\varepsilon > 0$. Một điều khiển $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ được gọi là nghiệm toàn cục của bài toán (1.1) nếu

$$J(\bar{u}) \leq J(u), \ \forall u \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Điều khiển $\bar{u}$ được gọi là *nghiệm địa phương* của bài toán (1.1) theo nghĩa $L^P(\Omega)$ nếu tồn tại một quả cầu đóng $\bar{B}^p_\varepsilon(\bar{u})$ sao cho

$$J(\bar{u}) \leq J(u), \forall u \in \mathcal{U}_{ad} \cap \bar{B}^p_\varepsilon(\bar{u}).$$

Nghiệm địa phương $\bar{u}$ được gọi là chặt nếu $J(\bar{u}) < J(u)$ với mọi $u \in \mathcal{U}_{ad} \cap \bar{B}^p_\varepsilon(\bar{u})$ và $u \neq \bar{u}$.

Dưới các giả thiết **(A1)-(A3)**, bài toán (1.1) có ít nhất một nghiệm toàn cục. Kết quả này là một trường hợp riêng của Casas *et al.* (2008) (Theorem 2.2).

Các kết quả trình bày dưới đây liên quan đến phương trình (1.2) được tham khảo trong Tröltzsch (2010) (Chapter 4). Với mỗi $u \in L^p(\Omega)$ và $p > N/2$, phương trình (1.2) có duy nhất một nghiệm yếu $y_u \in H^1_0(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Thêm vào đó, tồn tại hằng số $M_{\alpha,\beta}$ sao cho

$$\|y_u\|_{H^1_0(\Omega)} + \|y_u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq M_{\alpha,\beta}, \ \forall u \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (2.1)$$

Hàm điều khiển-trạng thái $G: L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ xác định bởi $G(u) = y_u$ thuộc lớp $\mathcal{C}^2$.

Hơn nữa, với mỗi $v \in L^2(\Omega), z_{u,v} = G'(u)v$ là nghiệm yếu duy nhất của phương trình

$$\begin{cases} Az + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)z = v & \text{trong } \Omega \\ z = 0 & \text{trên } \Gamma, \end{cases} \quad (2.2)$$

và với bất kỳ $v_1, v_2 \in L^2(\Omega), w_{v_1,v_2} = G''(u)(v_1, v_2)$ là nghiệm yếu duy nhất của phương trình

$$\begin{cases} Aw + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)w + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)z_{u,v_1}z_{u,v_2} = 0 \text{ trong } \Omega \\ w = 0 \text{ trên } \Gamma, \end{cases} \quad (2.3)$$

trong đó $y = G(u)$ và $z_{u,v_i} = G'(u)v_i$ với $i = 1,2$.

Với giả thiết **(A2)**, hàm mục tiêu $J: L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ thuộc lớp $\mathcal{C}^2$, và các đạo hàm bậc nhất và bậc hai của $J(\cdot)$ được tính bởi các công thức

$$J'(u)v = \int_\Omega \varphi_u(x)v(x)dx, \quad (2.4)$$

và

$$J''(u)(v_1, v_2) = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_u(x)) - \varphi_u(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y_u(x)) \right) z_{u,v_1}(x) z_{u,v_2}(x)dx, \quad (2.5)$$

trong đó $z_{u,v_i} = G'(u)v_i$ với $i = 1,2$, và trạng thái liên hợp $\varphi_u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ của trạng thái y_u là nghiệm yếu duy nhất của phương trình

$$\begin{cases} A^*\varphi + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_u)\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y_u) & \text{trong } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{trên } \Gamma, \end{cases}$$

trong đó A^* là toán tử liên hợp của toán tử *A*.

3 ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CHO BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN BANG-BANG

Trong mục này, một điều kiện đủ tối ưu bậc hai được thiết lập cho điều khiển bang-bang $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ theo đạo hàm bậc hai của hàm mục tiêu $J(\cdot)$. Ký hiệu $Y := H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ là không gian trạng thái với chuẩn $\|\cdot\|_Y$ tương ứng được định nghĩa bởi

$$\|y\|_Y := \|y\|_{H_0^1(\Omega)} + \|y\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Nếu $\bar{u}$ là một nghiệm địa phương của bài toán (1.1) theo nghĩa $L^p(\Omega)$, thì tồn tại một trạng thái $y_{\bar{u}} \in Y$ và một trạng thái liên hợp $\varphi_{\bar{u}} \in Y$ thỏa mãn các điều kiện cần tối ưu bậc nhất

$$\begin{cases} Ay_{\bar{u}} + f(x, y_{\bar{u}}) = \bar{u} & \text{trong } \Omega \\ y_{\bar{u}} = 0 & \text{trên } \Gamma, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} A^*\varphi_{\bar{u}} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_{\bar{u}})\varphi_{\bar{u}} = \frac{\partial L}{\partial y}(x, y_{\bar{u}}) & \text{trong } \Omega \\ \varphi_{\bar{u}} = 0 & \text{trên } \Gamma, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\int_\Omega \varphi_{\bar{u}}(x)\big(u(x) - \bar{u}(x)\big)dx \ge 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (3.3)$$

Sự kiện này được chứng minh trong Tröltzsch (2010) (Chapter 4). Hệ thống các điều kiện (3.1)-(3.3) được gọi là *hệ thống tối ưu bậc nhất* của bài toán điều khiển (1.1).

Cho $p \in [1, \infty]$ và $\bar{u}$ là nghiệm địa phương của bài toán (1.1) theo nghĩa $L^p(\Omega)$. Từ (3.3), ta suy ra

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \alpha(x), & \text{nếu } \varphi_{\bar{u}}(x) > 0 \\ \beta(x), & \text{nếu } \varphi_{\bar{u}}(x) < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

và

$$\varphi_{\bar{u}}(x) = \begin{cases} \ge 0, & \text{nếu } \bar{u}(x) = \alpha(x) \\ \le 0, & \text{nếu } \bar{u}(x) = \beta(x) \\ = 0, & \text{nếu } \alpha(x) < \bar{u}(x) < \beta(x). \end{cases} \quad (3.5)$$

Xét trường hợp tập $\{x \in \Omega | \varphi_{\bar{u}}(x) = 0\}$ có độ đo Lebesgue bằng không. Khi đó, do (3.4) và (3.5) ta có

$$\bar{u}(x) \in \{\alpha(x), \beta(x)\}, \quad \text{với h.h.} \, x \in \Omega. \quad (3.6)$$

Điều khiển $\bar{u}$ thỏa tính chất (3.6) được gọi là *điều khiển bang-bang.*

Ta biết rằng, chẳng hạn xem Bonnans and Shapiro, 2000 (Section 6.3), nón các hướng dừng liên kết với một điều khiển $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ được định nghĩa bởi

$$C_{\bar{u}} = \left\{ v \in L^2(\Omega) \middle| v(x) \begin{cases} \ge 0 & \text{nếu } \bar{u}(x) = \alpha(x) \\ \le 0 & \text{nếu } \bar{u}(x) = \beta(x) \\ = 0 & \text{nếu } \varphi_{\bar{u}}(x) \ne 0 \end{cases} \right\}$$

(3.7)

và điều kiện cần bậc hai thường được viết dưới dạng

$$J''(\bar{u})v^2 \ge 0, \quad \forall v \in C_{\bar{u}}, \quad (3.8)$$

Tuy nhiên, theo (3.4) và (3.7), nếu $\bar{u}$ là điều khiển bang-bang thì $C_{\bar{u}} = \{0\}$. Điều này cho thấy điều kiện (3.8) là tầm thường. Vì vậy, cần phải mở rộng điều kiện (3.8) để thu được những thông tin không tầm thường. Theo Casas (2012), nón $C_{\bar{u}}$ được mở rộng như sau: với $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ và $\tau \ge 0$, ta định nghĩa

$$C_{\bar{u}}^\tau = \left\{ v \in L^2(\Omega) \middle| v(x) \begin{cases} \ge 0 & \text{nếu } \bar{u}(x) = \alpha(x) \\ \le 0 & \text{nếu } \bar{u}(x) = \beta(x) \\ = 0 & \text{nếu } |\varphi_{\bar{u}}(x)| > \tau \end{cases} \right\},$$

(3.9)

Ta thấy rằng $C_{\bar{u}} \subseteq C_{\bar{u}}^{\tau}$ và $C_{\bar{u}}^{0} = C_{\bar{u}}$, hơn nữa ta có $C_{\bar{u}} \underset{\neq}{\subseteq} C_{\bar{u}}^{\tau}$ trong trường hợp tổng quát.

Để khảo sát một điều khiển bang-bang $\bar{u}$ của bài toán (1.1) thì phải quan tâm đến trường hợp tập $\{x \in \Omega | \varphi_{\bar{u}}(x) = 0\}$ có độ đo Lebesgue bằng không. Khi đó, theo Casas *et al.* (2017), xét giả thiết đặt lên trạng thái liên hợp $\varphi_{\bar{u}}$ sau đây:

(A4) Giả sử $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ thỏa hệ thống tối ưu bật nhất (3.1)-(3.3) và điều kiện dưới đây

$\exists K > 0$ sao cho $[\![\{x \in \Omega: |\varphi_{\bar{u}}(x)| \leq \varepsilon\}]\!] \leq K\varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0,$ (3.10)

trong đó $[\![\cdot]\!]$ ký hiệu độ đo Lebesgue.

Mệnh đề 3.1. (Casas et al., 2017, Proposition 2.7) Giả sử $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ và các giả thiết **(A1)-(A4)** được thỏa mãn. Khi đó, tồn tại $\kappa > 0$ sao cho

$$J'(\bar{u})(u - \bar{u}) \geq \kappa \|u - \bar{u}\|_{L^1(\Omega)}^2, \ \ \forall u \in \mathcal{U}_{ad}. \ (3.11)$$

Định lý 3.1. Giả sử $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ thỏa mãn các giả thiết **(A1)-(A4)** và tồn tại các hằng số $\delta > 0$ và $\tau > 0$ sao cho

$$J''(\bar{u})v^2 \geq \delta \|z_v\|_{L^2(\Omega)}^2, \ \ \forall v \in C_{\bar{u}}^{\tau}, \ \ (3.12)$$

trong đó $z_v = G'(\bar{u})v$ là nghiệm yếu của phương trình (2.2) với $y = y_{\bar{u}}$. Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $J(\bar{u}) + \frac{\kappa}{2}\|u - \bar{u}\|_{L^1(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{8}\|z_{u-\bar{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq J(u), \ \forall u \in \bar{B}_{\varepsilon}^2(\bar{u}) \cap \mathcal{U}_{ad},$ (3.13)

với $z_{u-\bar{u}} = G'(\bar{u})(u - \bar{u})$ và κ được cho trong Mệnh đề 3.1.

Chứng minh. Nhận thấy rằng giả thiết (A4) của định lý trùng với giả thiết (A4.ae) trong trường hợp ae=1 của Qui and Wachsmuth (2017). Bằng cách sử dụng giả thiết (A4.ae) với ae=1 và áp dụng Qui and Wachsmuth (2017) (Theorem 3.1) ta thu được kết quả của định lý. □

Chú ý rằng có thể sử dụng giả thiết (A4) để chứng minh trực tiếp Định lý 3.1 theo lược đồ chứng minh dưới đây.

Lược đồ chứng minh trực tiếp Định lý 3.1 với giả thiết (A4). Với $u \in \bar{B}_{\varepsilon}^2(\bar{u}) \cap \mathcal{U}_{ad}$, ta định nghĩa điều khiển

$$v(x) = \begin{cases} u(x) - \bar{u}(x), & \text{nếu } |\varphi_{\bar{u}}(x)| \leq \tau \\ 0, & \text{nếu ngược lại,} \end{cases}$$

và điều khiển $w = (u - \bar{u}) - v$.

Dễ dàng kiểm chứng được rằng $v \in C_{\bar{u}}^{\tau}$. Khai triển Taylor bậc hai hàm mục tiêu $J(\cdot)$ tại $\bar{u}$ ta thu được $J(u) = J(\bar{u}) + J'(\bar{u})(u - \bar{u}) + \frac{1}{2}J''(\hat{u})(u - \bar{u})^2$ với $\hat{u} = \bar{u} + \theta(u - \bar{u})$ và $\theta \in (0,1)$. Từ (3.4) và $u - \bar{u} = v + w$ ta suy ra $J(u) = J(\bar{u}) + \frac{1}{2}J'(\bar{u})(u - \bar{u}) + \frac{1}{2}\int_{\Omega}|\varphi_{\bar{u}}||u - \bar{u}|dx + \frac{1}{2}J''(\hat{u})(u - \bar{u})^2.$ (3.14)

Theo Mệnh đề 3.1, ta có

$$\frac{1}{2}J'(\bar{u})(u - \bar{u}) \geq \frac{1}{2}\kappa\|u - \bar{u}\|_{L^1(\Omega)}^2. \ (3.15)$$

Thêm vào đó, lập luận tương tự như trong chứng minh của Casas (2012) (Theorem 2.4) ta cũng thu được

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\varphi_{\bar{u}}||u - \bar{u}|dx + \frac{1}{2}J''(\hat{u})(u - \bar{u})^2 \geq \frac{\delta}{8}\|z_{u-\bar{u}}\|_{L^2(\Omega)}. \ (3.16)$$

Sử dụng (3.14), (3.15) và (3.16) ta thu được (3.13). □

Để minh họa cho ý nghĩa các kết quả về điều kiện đủ tối ưu bậc hai thu được trong mục này độc giả có thể tìm đọc (Casas, 2012, Example 2.1) với những phân tích rất sâu sắc về ví dụ này.

4 ỔN ĐỊNH HÖLDER CHO BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN BANG-BANG

Trong mục này sẽ khảo sát sự ổn định Hölder cho lớp bài toán điều khiển tối ưu dưới tác động của nhiễu. Bài toán nhiễu được cho dưới dạng

$$\begin{cases} \text{Min} \ \ \mathcal{J}(u,e) = J(u + e_y) + \left(e_J, y_{u+e_y}\right)_{L^2(\Omega)} \\ \text{thỏa đ.k.} \ \ \ \ \ \ u \in \mathcal{U}_{ad}(\varepsilon), \end{cases} (4.1)$$

trong đó

$$\mathcal{U}_{ad}(\varepsilon) = \mathcal{U}_{ad} \cap \bar{B}_{\varepsilon}^2(\bar{u}),$$

và hàm $J(\cdot)$ được cho trong (1.1), tức là

$$\mathcal{J}(u,e) = \int_{\Omega} L\left(x, y_{u+e_y}(x)\right) dx + \int_{\Omega} e_J(x) y_{u+e_y}(x) dx,$$

với $y_{u+e_y} = G(u + e_y)$ là nghiệm yếu của bài toán Dirichlet nhiễu sau đây

$$\begin{cases} Ay + f(x,y) = u + e_y & \text{trong } \Omega \\ y = 0 & \text{trên } \Gamma, \end{cases} (4.2)$$

và $e_J \in L^2(\Omega), e_y \in L^2(\Omega)$ là các tham số.

Ký hiệu $E := L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ là không gian tham số với chuẩn tương ứng là

$\|e\|_E = \|e_J\|_{L^2(\Omega)} + \|e_y\|_{L^2(\Omega)}, \ \forall e = (e_J, e_y) \in E.$ (4.3)

Định lý 4.1. (Qui và Wachsmuth, 2017, Theorem 4.1) Giả sử **(A1)-(A3)** được thỏa mãn và $\bar{u}$ là một nghiệm địa phương của bài toán (1.1) ứng với

$\varepsilon > 0$. Khi đó, bài toán nhiễu (4.1) có ít nhất một nghiệm toàn cục $\bar{u}_e$ ứng với trạng thái nhiễu tối ưu $y_{\bar{u}_e+e_y} \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ với mọi $e \in E$.

Định lý sau đây phát biểu một tiêu chuẩn về sự ổn định Hölder cho bài toán nhiễu (4.1) trong $L^1(\Omega)$. Đây là kết quả chính của bài báo này.

Định lý 4.2. Giả sử **(A1)-(A4)** được thỏa mãn và $\bar{u}$ là một nghiệm địa phương của bài toán (1.1) tương ứng với $\varepsilon > 0$ thỏa điều kiện (3.12). Khi đó, tồn tại hằng số $\varrho > 0$ sao cho

$$\|\bar{u}_e - \bar{u}\|_{L^1(\Omega)} \le \varrho \|e\|_E^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.4)$$

trong đó $\bar{u}_e$ là nghiệm toàn cục của bài toán nhiễu (4.1) ứng với tham số $e \in E$ đủ bé.

Chứng minh. Áp dụng Định lý 3.1 cho $\bar{u}_e \in \mathcal{U}_{ad}(\varepsilon)$, ta thu được

$$J(\bar{u}) + \frac{\kappa}{2}\|\bar{u}_e - \bar{u}\|^2_{L^1(\Omega)} + \frac{\delta}{8}\left\|z_{\bar{u}_e-\bar{u}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (4.5)$$

$$\le J(\bar{u}_e) = J(\bar{u}_e) - J(\bar{u}_e + e_y) + J(\bar{u}_e + e_y)$$
$$= J(\bar{u}_e) - J(\bar{u}_e + e_y) + \mathcal{J}(\bar{u}_e, e) - \left(e_J, y_{\bar{u}_e+e_y}\right)_{L^2(\Omega)}.$$

Không giảm tính tổng quát ta giả sử rằng tồn tại $l_1 > 0$ sao cho $\sup_{\xi\in[0,1]}\|J'(\bar{u}_e + \xi e_y)\| \le l_1$ với mọi $e \in E$ đủ bé. Theo định lý giá trị trung bình ta suy ra đánh giá sau đây

$$J(\bar{u}_e) - J(\bar{u}_e + e_y) \le \sup_{\xi\in[0,1]}\|J'(\bar{u}_e + \xi e_y)\| \cdot \|e_y\|_{L^2(\Omega)} \le l_1\|e_y\|_{L^2(\Omega)}. \qquad (4.6)$$

Thêm vào đó, vì $\bar{u}_e$ là nghiệm toàn cục của bài toán nhiễu (4.1) ứng với tham số e, nên ta có $\mathcal{J}(\bar{u}_e, e) \le \mathcal{J}(\bar{u}, e)$. Điều này kéo theo $\mathcal{J}(\bar{u}_e, e) - \left(e_J, y_{\bar{u}_e+e_y}\right)_{L^2(\Omega)} \le \mathcal{J}(\bar{u}, e) - \left(e_J, y_{\bar{u}_e+e_y}\right)_{L^2(\Omega)}$

$$= J(\bar{u} + e_y) + \left(e_J, y_{\bar{u}+e_y}\right)_{L^2(\Omega)} - \left(e_J, y_{\bar{u}_e+e_y}\right)_{L^2(\Omega)} \qquad (4.7)$$

$$= J(\bar{u} + e_y) + \left(e_J, y_{\bar{u}+e_y} - y_{\bar{u}_e+e_y}\right)_{L^2(\Omega)}$$

$$\le J(\bar{u} + e_y) + \|e_J\|_{L^2(\Omega)}\left\|y_{\bar{u}+e_y} - y_{\bar{u}_e+e_y}\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Vì $y_{\bar{u}_e+e_y} = G(\bar{u}_e + e_y)$ và $y_{\bar{u}+e_y} = G(\bar{u} + e_y)$ là các nghiệm yếu của các phương trình (4.1) ứng với các vế phải $\bar{u}_e + e_y$ và $\bar{u} + e_y$, nên tồn tại một hàm đo được $\theta: \Omega \to [0,1]$ sao cho

$$\begin{cases} A\left(y_{\bar{u}_e+e_y} - y_{\bar{u}+e_y}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_\theta)\left(y_{\bar{u}_e+e_y} - y_{\bar{u}+e_y}\right) = \bar{u}_e - \bar{u} & \text{trong } \Omega \\ y_{\bar{u}_e+e_y} - y_{\bar{u}+e_y} = 0 & \text{trên } \Gamma, \end{cases}$$

trong đó $y_\theta = y_{\bar{u}+e_y} + \theta\left(y_{\bar{u}_e+e_y} - y_{\bar{u}+e_y}\right)$. Từ **(A1)** và (2.1) ta có $0 \le \partial f/\partial y(\cdot, y_\theta) \in L^\infty(\Omega)$. Điều này kết hợp với các kỹ thuật trong (Meyer et al., 2011, Theorem 2.12] ta suy ra sự tồn tại hằng số $D_{\alpha,\beta}$ sao cho

$$\left\|y_{\bar{u}_e+e_y} - y_{\bar{u}+e_y}\right\|_{L^2(\Omega)} \le D_{\alpha,\beta}\|\bar{u}_e - \bar{u}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Từ đánh giá này và (4.7) ta nhận được $\mathcal{J}(\bar{u}_e, e) - \left(e_J, y_{\bar{u}_e+e_y}\right)_{L^2(\Omega)} \le J(\bar{u} + e_y) + \|e_J\|_{L^2(\Omega)} D_{\alpha,\beta}\|\bar{u}_e - \bar{u}\|_{L^1(\Omega)}$. (4.8)

Từ (4.5), (4.6) và (4.8) ta suy ra

$$J(\bar{u}) + \frac{\kappa}{2}\|\bar{u}_e - \bar{u}\|^2_{L^1(\Omega)} + \frac{\delta}{8}\left\|z_{\bar{u}_e-\bar{u}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \le l_1\|e_y\|_{L^2(\Omega)} + J(\bar{u} + e_y) + \|e_J\|_{L^2(\Omega)} D_{\alpha,\beta}\|\bar{u}_e - \bar{u}\|_{L^1(\Omega)}. \qquad (4.9)$$

Sử dụng định lý giá trị trung bình một lần nữa ta suy ra các đánh giá sau

$$J(\bar{u} + e_y) - J(\bar{u}) \le \sup_{\zeta\in[0,1]}\|J'(\bar{u} + \zeta e_y)\| \cdot \|e_y\|_{L^2(\Omega)} \le l_2\|e_y\|_{L^2(\Omega)}, \qquad (4.10)$$

trong đó $\sup_{\zeta\in[0,1]}\|J'(\bar{u} + \zeta e_y)\| \le l_2$ với $l_2 > 0$ và e đủ bé. Từ (4.9) và (4.10) ta suy ra rằng

$$\frac{\kappa}{2}\|\bar{u}_e - \bar{u}\|^2_{L^1(\Omega)} + \frac{\delta}{8}\left\|z_{\bar{u}_e-\bar{u}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \le (l_1 + l_2)\|e_y\|_{L^2(\Omega)} + \|e_J\|_{L^2(\Omega)} D_{\alpha,\beta}\|\bar{u}_e - \bar{u}\|_{L^1(\Omega)}$$

$$\le (l_1 + l_2)\|e_y\|_{L^2(\Omega)} + \|e_J\|_{L^2(\Omega)} D_{\alpha,\beta}\varepsilon|\Omega|^{\frac{1}{2}} \qquad (4.11)$$

$$\le (l_1 + l_2)\|e_y\|_{L^2(\Omega)} + \|e_J\|_{L^2(\Omega)} D_{\alpha,\beta}\varepsilon|\Omega|^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \left(l_1 + l_2 + D_{\alpha,\beta}\varepsilon|\Omega|^{\frac{1}{2}}\right)\left(\|e_y\|_{L^2(\Omega)} + \|e_J\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

$$= \left(l_1 + l_2 + D_{\alpha,\beta}\varepsilon|\Omega|^{\frac{1}{2}}\right)\|e\|_E$$

trong đó $\|\bar{u}_e - \bar{u}\|_{L^1(\Omega)} \leq |\Omega|^{1-\frac{1}{2}} \|\bar{u}_e - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon |\Omega|^{\frac{1}{2}}$. Điều này kéo theo

$$\|\bar{u}_e - \bar{u}\|^2_{L^1(\Omega)} \leq 2\kappa^{-1} \left(l_1 + l_2 + D_{\alpha,\beta} \varepsilon |\Omega|^{\frac{1}{2}} \right) \|e\|_E.$$

Bằng cách đặt $\varrho = \left(2\kappa^{-1} \left(l_1 + l_2 + D_{\alpha,\beta} \varepsilon |\Omega|^{\frac{1}{2}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$, ta thu được (4.4). □

Hệ quả 4.1. Giả sử tất cả các giả thiết trong Định lý 4.2 được thỏa mãn. Khi đó, tồn tại một hằng số $c > 0$ sao cho

$$\|\bar{u}_e - \bar{u}\|_{L^1(\Omega)} \leq c \left(\|e_y\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} + \|e_J\|_{L^2(\Omega)} \right), \tag{4.12}$$

trong đó $\bar{u}_e$ là nghiệm toàn cục của bài toán nhiễu (4.1) ứng với tham số e đủ bé.

Chứng minh. Theo (4.11), tồn tại các hằng số $l_1 > 0$ và $l_2 > 0$ sao cho đánh giá sau đây được thỏa mãn $\frac{\kappa}{2} \|\bar{u}_e - \bar{u}\|^2_{L^1(\Omega)} + \frac{\delta}{8} \|z_{\bar{u}_e - \bar{u}}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (l_1 + l_2) \|e_y\|_{L^2(\Omega)} + \|e_J\|_{L^2(\Omega)} D_{\alpha,\beta} \|\bar{u}_e - \bar{u}\|_{L^1(\Omega)}$.

Sử dụng bất đẳng thức Young ta suy ra

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa}{2} \|\bar{u}_e - \bar{u}\|^2_{L^1(\Omega)} &\leq (l_1 + l_2) \|e_y\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \left(\xi^{-1} \|e_J\|_{L^2(\Omega)} D_{\alpha,\beta} \right) \left(\xi \|\bar{u}_e - \bar{u}\|_{L^1(\Omega)} \right) \\
&\leq (l_1 + l_2) \|e_y\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{\left(\xi^{-1} D_{\alpha,\beta} \right)^2}{2} \|e_J\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{\xi^2}{2} \|\bar{u}_e - \bar{u}\|^2_{L^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

với mọi $\xi > 0$. Vì vậy, có thể chọn $\xi > 0$ đủ bé để nhận được đánh giá sau đây

$$l_3 \|\bar{u}_e - \bar{u}\|^2_{L^1(\Omega)} \leq (l_1 + l_2) \|e_y\|_{L^2(\Omega)} + l_4 \|e_J\|^2_{L^2(\Omega)},$$

trong đó $l_3 = \frac{\kappa}{2} - \frac{\xi^2}{2} > 0$ và $l_4 = \frac{\left(\xi^{-1} D_{\alpha,\beta} \right)^2}{2} > 0$. Như vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}_e - \bar{u}\|^2_{L^1(\Omega)} &\leq (l_1 + l_2) l_3^{-1} \|e_y\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + l_3^{-1} l_4 \|e_J\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq l \left(\|e_y\|_{L^2(\Omega)} + \|e_J\|^2_{L^2(\Omega)} \right),
\end{aligned}$$

trong đó $l = \max\{(l_1 + l_2) l_3^{-1}, l_3^{-1} l_4\}$. Từ đây ta suy ra

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}_e - \bar{u}\|_{L^1(\Omega)} &\leq l^{\frac{1}{2}} \left(\|e_y\|_{L^2(\Omega)} + \|e_J\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq l^{\frac{1}{2}} \left(\|e_y\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} + \|e_J\|_{L^2(\Omega)} \right).
\end{aligned}$$

Đặt $c = l^{1/2} > 0$, ta nhận được đánh giá (4.12).□

Hệ quả 4.2. Giả sử tất cả các giả thiết trong Định lý 4.2 được thỏa mãn. Khi đó, ta có $\bar{u}_e \to \bar{u}$ trong $L^1(\Omega)$ khi $e \to 0$ trong E, trong đó $\bar{u}_e$ là nghiệm toàn cục của bài toán nhiễu (4.1) ứng với tham số $e \in E$.

Nhận xét 4.1. Kết quả về tính ổn định Hölder của nghiệm của bài toán nhiễu thu được trong Định lý 4.2 dựa trên giả thiết (A4). Do đó, Định lý 4.2 không thể suy ra từ Qui and Wachsmuth (2017) (Theorem 4.5) khi sử dụng giả thiết (A4.ae) với ae=1/2. Hơn nữa, kỹ thuật chứng minh Định lý 4.2 (và cả Hệ quả 4.1) hoàn toàn khác với kỹ thuật chứng minh của Qui and Wachsmuth (2017) (Theorem 4.5). Chú ý rằng giả thiết (A4) và giả thiết (A4.ae) với ae=1/2 là hoàn toàn khác nhau. Về mặt kết quả, Định lý 4.2 thu được kết quả ổn định cho các nghiệm toàn cục của bài toán nhiễu trong khi Qui and Wachsmuth (2017) (Theorem 4.5) thu được kết quả ổn định cho các điểm KKT của bài toán nhiễu đủ gần nghiệm địa phương của bài toán gốc, hai kết quả ổn định vừa nêu là hoàn toàn khác nhau.

Ý nghĩa của kết quả ổn định Hölder. Tính ổn định Lipschitz của nghiệm của các bài toán tối ưu có tham số rất quan trọng trong việc nghiên cứu và thiết lập các thuật toán giải số cho các bài toán tối ưu. Tuy nhiên, khi tính ổn định Lipschitz không đạt được thì tính ổn định Hölder được lựa chọn để thay thế như một giải pháp tất yếu. Trong quá trình nghiên cứu sự ổn định của các bài toán điều khiển tối ưu bang-bang có nhiễu, trong nghiên cứu này đã thu được các kết quả mới về tính ổn định Hölder cho lớp bài toán này.

Độc giả có thể tìm đọc cuốn sách chuyên khảo rất nổi tiếng Tröltzsch (2010) với rất nhiều bài toán cụ thể và ví dụ số phong phú liên quan đến các bài toán điều khiển tối ưu bang-bang cùng những phân tích sâu sắc về tính cần thiết của sự ổn định nghiệm trong ứng dụng thực tế.

5 KẾT LUẬN

Bài báo đã thu được các kết quả mới về điều kiện đủ tối ưu bậc hai và đặc biệt là tính ổn định Hölder của một lớp các bài toán điều khiển tối ưu bang-bang cho các phương trình vi phân đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính. Trong các nghiên cứu tiếp theo, các kết quả ổn định Hölder thu được sẽ áp dụng vào việc thiết lập các phương pháp số giải các bài toán điều khiển tối ưu bang-bang cho các phương trình vi phân đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính.

LỜI CẢM TẠ

Tác giả xin chân thành cảm ơn TS. Nguyễn Thành Quí về những trao đổi rất hữu ích liên quan đến chủ đề nghiên cứu của bài báo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bonnans, J.F., Shapiro, A., 2000. Perturbation Analysis of Optimization Problems. Springer-Verlag, New York, 567 pages.

Casas, E., 2012. Second order analysis for bang-bang control problems of PDEs. SIAM Journal on Control and Optimization. 50(4): 2355–2372.

Casas, E., De Los Reyes, J.C. and Tröltzsch, F., 2008. Sufficient second-order optimality conditions for semilinear control problems with pointwise state constraints. SIAM Journal on Optimization, 19(2), 616–643.

Casas, E., Wachsmuth, D. and Wachsmuth, G., 2017. Sufficient second-order conditions for bang-bang control problems. SIAM Journal on Control and Optimization 55, 3066–3090.

Meyer, C., Panizzi, L. and Schiela, A., 2011. Uniqueness criteria for the adjoint equation in state-constrained elliptic optimal control. Numerical Functional Analysis and Optimization 32, 983–1007.

Pörner, F., Wachsmuth, D., 2016. An iterative Bregman regularization method for optimal control problems with inequality constraints. Optimization 65, 2195–2215.

Pörner, F., Wachsmuth, D., 2017. Tikhonov regularization of optimal control problems governed by semi-linear partial differential equations. Preprint, 1–25.

Qui, N.T., Wachsmuth, D., 2017, Stability for bang-bang control problems of partial differential equations. Optimization, (2018), pp.~1--21. DOI:10.1080/02331934.2018.1522634

Tröltzsch, F., 2010. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications. American Mathematical Society, Providence, RI.