MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ VÀ CÔNG THỨC BAYES

Nguyễn Đình Inh

Trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm TP.HCM

Email: *inhnd@hufi.edu.vn*

Ngày nhận bài: 16/7/2020; Ngày chấp nhận đăng: 20/8/2020

TÓM TẮT

Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes là những nội dung quan trọng, lý thú được giảng dạy trong chương trình Xác suất ở trường đại học. Trong phần đầu của bài báo này tác giả dùng công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes để giải một số bài toán xác suất sơ cấp nổi tiếng như bài toán về tính công bằng trong thể thức rút thăm may mắn, bài toán Monty Hall. Riêng bài toán rút thăm may mắn được trình bày với lời giải chặt chẽ và tổng quát hơn những lời giải đã biết. Phần cuối bài giới thiệu một số ứng dụng của công thức Bayes trong y học, trong hoạt động tìm kiếm cứu hộ. Hy vọng bài viết này mang lại những điều bổ ích cho các bạn bắt đầu việc giảng dạy hay học tập môn Xác suất.

Từ khóa: Công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes, rút thăm may mắn, Monty Hall, tìm kiếm cứu hộ.

1. CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ VÀ CÔNG THỨC BAYES

Định lý

Trong không gian xác suất (Ω, F, P), cho $\{A_i\}_{1=1}^{n}$ là một họ đầy đủ các biến cố (tức $A_i A_j = \varnothing$ với mọi $i \neq j$, $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$) và B là biến cố bất kỳ thuộc F. Khi đó

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B \mid A_i) \tag{1}$$

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i).P(B \mid A_i)}{P(B)}; i = \overline{1,n} \ \left(P(B) \neq 0\right) \tag{2}$$

Công thức (1) được gọi là công thức xác suất đầy đủ, công thức (2) là công thức Bayes. Trong công thức Bayes, các xác suất $P(A_i)$ gọi là các xác suất tiên nghiệm, các xác suất $P(A_i \mid B)$ gọi là các xác suất hậu nghiệm.

Công thức Bayes hay định lý Bayes mang tên nhà toán học người Anh Thomas Bayes (1701-1761). Định lý này được trình bày trong một bài luận công bố trước Hội khoa học Hoàng gia năm 1763 bởi một người bạn của Bayes là Richard Price [1].

2. BÀI TOÁN RÚT THĂM

Có n lá thăm trong đó có m lá trúng thưởng ($m < n$). Cho n người lần lượt rút mỗi người một lá. Hỏi rằng người rút trước, kẻ rút sau, ai có nhiều cơ may hơn ai?

Giải:

Cơ may trúng thưởng của một người tham gia rút thăm chính là khả năng (xác suất) người đó rút được thăm trúng. Ta sẽ dùng công thức xác suất đầy đủ để chứng minh xác suất trúng thưởng của mọi người là như nhau, bất kể rút trước hay rút sau. Thật vậy

Trước hết mệnh đề "xác suất trúng thưởng của mọi người bằng nhau" tương đương với mệnh đề "xác suất không trúng thưởng của mọi người bằng nhau", nói cách khác: vai trò của m và $n-m$ như nhau nên không mất tính tổng quát có thể giả sử $m \le n-m$.

Gọi B_k là biến cố người rút thứ k được thăm trúng thưởng, $k=\overline{1,n}$.

Dễ thấy $P(B_1)=\dfrac{m}{n}$.

Với mỗi $2 \le k \le n$, gọi A_i là biến cố có đúng i người trúng và $k-1-i$ người không trúng trong $k-1$ người đầu tiên $(0 \le i \le k-1)$. Vì có tất cả m thăm trúng và $n-m$ thăm không trúng nên cần thêm điều kiện

$$\begin{cases} i \le m \\ k-1-i \le n-m \end{cases} \Leftrightarrow k-1-(n-m) \le i \le m$$

Như vậy điều kiện của i là

$$\max\{0; k-1-(n-m)\} \le i \le \min\{m; k-1\}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} i \in I_1 = \{0,\dots,k-1\} & \text{khi } k-1 < m \le n-m \\ i \in I_2 = \{0,\dots,m\} & \text{khi } m \le k-1 < n-m \\ i \in I_3 = \{k-1-(n-m),\dots,m\} & \text{khi } m \le n-m \le k-1 \end{array}\right.$$

Ta xét từng trường hợp trong 3 trường hợp trên:

- **Trường hợp 1.** $k-1 < m \le n-m$ tương ứng với $i \in I_1 = \{0,\dots,k-1\}$, khi đó họ $\{A_i\}_{i\in I_1}$ là họ đầy đủ các biến cố nên theo công thức xác suất đầy đủ ta có

$$P(B_k)=\sum_{i=0}^{k-1} P(A_i).P(B_k \mid A_i) \qquad (3)$$

Để ý rằng biến cố A_i chính là tổng của C_{k-1}^i biến cố xung khắc từng đôi, mỗi biến cố thành phần này đều là i người trúng nhưng thứ tự khác nhau (vì lấy i phần tử trong $k-1$ phần tử nên có C_{k-1}^i tổ hợp), dễ thấy xác suất của các biến cố thành phần bằng nhau và bằng xác suất của biến cố i người đầu trúng và $k-1-i$ người tiếp theo không trúng, tức là bằng:

$$\frac{m}{n}.\frac{m-1}{n-1}\cdots\frac{m-i+1}{n-i+1}.\frac{n-m}{n-i}\cdots\frac{n-m-(k-1-i)+1}{n-k+2}$$

$$=\frac{\dfrac{m!}{(m-i)!}.\dfrac{(n-m)!}{\big(n-m-(k-1-i)\big)!}}{\dfrac{n!}{\big(n-(k-1)\big)!}}$$

nên

$$P(A_i)=C_{k-1}^{i}\frac{\dfrac{m!}{(m-i)!}.\dfrac{(n-m)!}{\big(n-m-(k-1-i)\big)!}}{\dfrac{n!}{\big(n-(k-1)\big)!}}$$

$$=\frac{(k-1)!}{i!(k-1-i)!}.\frac{\dfrac{m!}{(m-i)!}.\dfrac{(n-m)!}{\big(n-m-(k-1-i)\big)!}}{\dfrac{n!}{\big(n-(k-1)\big)!}}$$

$$=\frac{\dfrac{m!}{i!(m-i)!}.\dfrac{(n-m)!}{(k-1-i)!\big(n-m-(k-1-i)\big)!}}{\dfrac{n!}{(k-1)!\big(n-(k-1)\big)!}}$$

$$=\frac{C_m^iC_{n-m}^{k-1-i}}{C_n^{k-1}}$$

(có thể dùng phân phối siêu bội: xác suất có i người trúng khi $k-1$ người rút lần lượt cũng chính là xác suất có i người trúng khi $k-1$ người rút đồng thời; tức $P(A_i)=\frac{C_m^iC_{n-m}^{k-1-i}}{C_n^{k-1}}$).

Còn

$$P(B_k\mid A_i)=\frac{m-i}{n-(k-1)}$$

Do đó

$$P(A_i).P(B_k\mid A_i)=\frac{C_m^iC_{n-m}^{k-1-i}}{C_n^{k-1}}.\frac{m-i}{n-(k-1)}$$

$$=\frac{\dfrac{m!}{i!(m-i)!}.C_{n-m}^{k-1-i}}{\dfrac{n!}{(k-1)!\big(n-(k-1)\big)!}}.\frac{m-i}{n-(k-1)}$$

$$=\frac{(i+1).\dfrac{m!}{(i+1)!(m-(i+1))!}.C_{n-m}^{k-1-i}}{k.\dfrac{n!}{k!\big(n-k\big)!}}$$

$$=\frac{(i+1)C_m^{i+1}C_{n-m}^{k-1-i}}{kC_n^k}.$$

Thay vào (3) ta được

$$P(B_k)=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(i+1)C_m^{i+1}C_{n-m}^{k-1-i}}{kC_n^k}=\frac{1}{kC_n^k}.\sum_{j=1}^{k}jC_m^jC_{n-m}^{k-j} \qquad (4)$$

Xét tập hợp S có n phần tử đôi một khác nhau, ta chia S thành 2 tập hợp A, B rời nhau trong đó A có m phần tử và B có $n-m$ phần tử. Từ mỗi tổ hợp chập k của S có dạng $\left(x_1, x_2, ..., x_k\right)$, ta "nhân" thành k bộ như sau: bộ thứ nhất là $x_1, x_1, x_2, ..., x_k$ (x_1 lặp 2 lần), bộ thứ hai là $x_1, x_2, x_2, ..., x_k$ (x_2 lặp 2 lần), …, bộ thứ k là $x_1, x_2, ..., x_k, x_k$ (x_k lặp 2 lần). Như vậy từ C_n^k tổ hợp chập k của S sinh ra kC_n^k bộ có lặp 1 phần tử.

Bây giờ trong những tổ hợp chập k của S, xét riêng những tổ hợp chứa j phần tử thuộc tập A và $k-j$ phần tử thuộc tập B thì có $C_m^j C_{n-m}^{k-j}$ tổ hợp như vậy, những tổ hợp này sinh ra $jC_m^j C_{n-m}^{k-j}$ bộ có lặp mà phần tử lặp thuộc tập hợp A. Cho j chạy từ 1 tới k (lưu ý rằng ta đang xét trường hợp $k-1<m\le n-m$ nên các số $C_m^j; C_{n-m}^{k-j}$ đều có nghĩa) và lấy tổng ta được tất cả $\sum_{j=1}^{k} jC_m^j C_{n-m}^{k-j}$ bộ có lặp mà phần tử lặp thuộc tập A. Mặt khác, trong n phần tử của tập S có m phần tử thuộc tập A nên trong tổng cộng kC_n^k bộ có lặp sinh ra từ các tổ hợp chập k của S sẽ có $\frac{m}{n}kC_n^k$ bộ mà phần tử lặp thuộc tập A. Do đó ta có đẳng thức tổ hợp sau:

$$\sum_{j=1}^{k} jC_m^j C_{n-m}^{k-j} = \frac{m}{n}.kC_n^k \tag{5}$$

Từ (4) vào (5) ta được

$$P(B_k) = \frac{m}{n}.$$

• **Trường hợp 2.** $m \le k-1 < n-m$ tương ứng với $i \in I_2 = \{0, ..., m\}$, khi đó họ $\{A_i\}_{i\in I_2}$ là họ đầy đủ.

Ta cũng có các công thức tương tự như (3), (4), (5) nhưng với $i \in \{0, ..., m\}; j \in \{1, ..., m+1\}$, tức

$$P(B_k) = \sum_{i=0}^{m} P(A_i).P(B_k \mid A_i)$$

$$P(B_k) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(i+1)C_m^{i+1} C_{n-m}^{k-1-i}}{kC_n^k} = \frac{1}{kC_n^k}.\sum_{j=1}^{m+1} jC_m^j C_{n-m}^{k-j}$$

$$\sum_{j=1}^{m+1} jC_m^j C_{n-m}^{k-j} = \frac{m}{n}.kC_n^k$$

và cũng có kết quả

$$P(B_k) = \frac{m}{n}.$$

• **Trường hợp 3.** $m \le n-m \le k-1$ tương ứng với $i \in I_3 = \{k-1-(n-m), ..., m\}$, khi đó $\{A_i\}_{i\in I_3}$ là họ đầy đủ. Tương tự trường hợp 1, tuy nhiên $i \in \{k-1-(n-m), ..., m\}$; $j \in \{k-(n-m), ..., m+1\}$ và cũng có

$$P(B_k) = \frac{m}{n}.$$

Vậy trong mọi trường hợp đều có $P(B_k) = \dfrac{m}{n}$, tức xác suất trúng thưởng của mọi người đều bằng nhau.

Kết quả này cho thấy rằng thể thức rút thăm phân phối trong đời sống là công bằng.

Các tài liệu đề cập đến bài toán rút thăm thường chỉ chứng minh được $P(B_1) = P(B_2)$ [2, 3] hoặc chỉ làm được trường hợp cụ thể với $n = 3, m = 1$ [2, 4]. Để giải bài toán một cách chặt chẽ cần lời giải tổng quát như đã trình bày.

3. BÀI TOÁN MONTY HALL

"Let's Make a Deal" là một game show nổi tiếng trên kênh truyền hình Mỹ do Monty Hall sáng lập, được mua bản quyền và phát sóng ở nhiều nước. Trong game show này có một trò chơi như sau: có 3 cánh cửa, đằng sau 1 trong 3 cánh cửa đó là 1 phần quà, sau 2 cửa còn lại không có gì. Người chơi được chọn 1 trong 3 cánh cửa, nếu chọn đúng cửa có quà thì được nhận quà. Ban đầu người chơi được chọn trước 1 cửa nhưng chưa mở ngay. Sau đó người dẫn chương trình (MC) mở một trong hai cửa còn lại và chỉ mở cửa không có quà (MC là chủ trò, được sắp xếp nên anh ta biết cửa nào có quà, cửa nào không). Sau khi MC mở 1 cửa không có quà, người chơi được quyền chọn, hoặc là giữ cửa mình chọn ban đầu, hoặc là đổi lấy cửa chưa được mở còn lại. Theo bạn thì người chơi nên giữ hay đổi? Vì sao?

Bài toán này đã gây nhiều tranh cãi giữa các người hâm mộ game show này và là một chủ đề được bàn luận sôi nổi trên báo chí khoa học cũng như báo chí đại chúng [5]. Sau đây là lời giải bằng công thức Bayes:

Giải:

Đánh số ba cửa là 1, 2, 3. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là các biến cố cửa 1, 2, 3 có quà, ta có A_1, A_2, A_3 là một họ đầy đủ và

$$P\left(A_1\right) = P\left(A_2\right) = P\left(A_3\right) = \frac{1}{3}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử người chơi chọn cửa 1. Khi người chơi đã chọn cửa 1, có 2 trường hợp có thể xảy ra: một là MC mở cửa 2, hai là MC mở cửa 3. Ở đây chỉ cần xét trường hợp MC mở cửa 2, trường hợp cửa 3 tương tự.

Gọi B_2 là biến cố MC mở cửa 2, xét các trường hợp:

• Nếu cửa 1 có quà thì MC có 2 lựa chọn mở của 2 hoặc cửa 3 với xác suất bằng nhau nên

$$P\left(B_2 \mid A_1\right) = \frac{1}{2}.$$

• Nếu cửa 2 có quà thì MC chỉ có 1 lựa chọn mở cửa 3 nên xác suất mở cửa 2 bằng 0, tức

$$P\left(B_2 \mid A_2\right) = 0.$$

• Nếu cửa 3 có quà thì MC chỉ có 1 lựa chọn mở cửa 2 nên xác suất mở cửa 2 bằng 1, tức

$$P\left(B_2 \mid A_1\right) = 1.$$

Khi có thông tin cửa 2 đã được MC mở thì các xác suất cửa 1, cửa 3 có quà được tính theo công thức Bayes

$$P(A_1 \mid B_2) = \frac{P(A_1).P(B_2 \mid A_1)}{P(A_1).P(B_2 \mid A_1) + P(A_2).P(B_2 \mid A_2) + P(A_3).P(B_2 \mid A_3)} = \frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.0 + \frac{1}{3}.1} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_3 \mid B_2) = \frac{P(A_3).P(B_2 \mid A_3)}{P(A_1).P(B_2 \mid A_1) + P(A_2).P(B_2 \mid A_2) + P(A_3).P(B_2 \mid A_3)} = \frac{\frac{1}{3}.1}{\frac{1}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.0 + \frac{1}{3}.1} = \frac{2}{3}.$$

Rõ ràng nếu đổi sang cửa còn lại thay vì giữ nguyên cửa đã chọn thì xác suất người chơi được nhận quà sẽ tăng lên gấp đôi. Vì vậy, người chơi nên đổi cửa.

4. QUY TRÌNH BAYESIAN UPDATING

Giả sử khi nghiên cứu một vấn đề $\mathcal{A}$, ban đầu ta đưa ra các giả thuyết $H_1, H_2, ..., H_n$ về $\mathcal{A}$ với các xác suất tiên nghiệm $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$. Các xác suất này thể hiện hiểu biết ban đầu của ta về $\mathcal{A}$. Sau khi có thông tin I_1, ta dùng công thức Bayes để cập nhật hiểu biết của ta về $\mathcal{A}$, bằng cách tính các xác suất hậu nghiệm $P(H_1 \mid I_1), P(H_2 \mid I_1), ..., P(H_n \mid I_1)$. Khi có thêm thông tin mới I_2 và ta lại coi $P(H_1 \mid I_1), P(H_2 \mid I_1), ..., P(H_n \mid I_1)$ như là các xác suất tiên nghiệm mới và dùng công thức Bayes để tiếp tục cập nhật hiểu biết về $\mathcal{A}$, bằng cách tính các xác suất hậu nghiệm mới $P(H_1 \mid I_1 I_2), P(H_2 \mid I_1 I_2), ..., P(H_n \mid I_1 I_2) \ldots$ Cứ như thể sử dụng các thông tin mới ta liên tục cập nhật các hiểu biết về $\mathcal{A}$. Quy trình này được gọi là Bayesian updating. Bayesian updating đã và đang được áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực của khoa học, kỹ thuật, y học, triết học, v.v.

Ứng dụng đầu tiên của Bayesian updating bài viết này giới thiệu là trong hoạt động tìm kiếm cứu nạn trên biển. Một trong những cuộc tìm kiếm điển hình là vụ đội tìm kiếm cứu nạn của Mỹ tìm kiếm một người đánh cá bị mất tích khi rơi xuống biển [6]. Thông tin đầu tiên mà đội tìm kiếm nhận được là ông Aldridge bị rơi xuống biển trong khoảng từ 9 giờ tối ngày 27-7-2014 đến 6 giờ sáng ngày hôm sau. Những giờ sau đó, các thông tin mới như sự thay đổi dòng hải lưu, hướng gió, v.v. do các trực thăng và tàu cứu hộ thu thập được tiếp tục được nạp vào máy tính. Sử dụng Bayesian updating thông qua một hệ thống xử lý gọi là SAROPS (Search and Rescue Optimal Planning System), máy tính đã liên tục cập nhật và định vị ngày càng chính xác khu vực mà người mất tích có khả năng đang ở đó. Sau 12 giờ đội tìm kiếm đã phát hiện được người đánh cá đang ôm phao trôi trên biển, gần kiệt sức nhưng vẫn còn sống.

Bayesian updating cũng được ứng dụng trong xét nghiệm y khoa. Một số thuật ngữ được quy ước để đánh giá độ chính xác của một xét nghiệm T như sau:

- Độ nhạy (sensitivity): là tỷ lệ xét nghiệm T cho kết quả dương tính (T^+) đối với người bị bệnh B, ký hiệu là $P(T^+ \mid B^+)$, còn gọi là dương thật (true positive).

- Âm giả, $P(T^- \mid B^+)$, là tỷ lệ xét nghiệm T cho kết quả âm tính đối với người bị bệnh B.

- Độ chuyên hay độ đặc hiệu (specificity): là tỷ lệ xét nghiệm T cho kết quả âm tính trên người không bị bệnh, $P(T^- \mid B^-)$, còn gọi là âm thật.

- Dương giả, $P\left(T^{+} \mid B^{-}\right)$, là tỷ lệ xét nghiệm T cho dương tính trên người không bị bệnh B.

Giả sử có hai xét nghiệm T_1 và T_2 trong đó T_1 có độ nhạy 93% và độ chuyên 95%, T_2 dương giả 7% và âm giả 5%. Xét nghiệm T_1 dùng sàng lọc người có nguy cơ bệnh B còn xét nghiệm T_2 dùng chẩn đoán bệnh này trên những người mà T_1 cho kết quả dương tính. Một người làm liên tiếp hai xét nghiệm độc lập T_1 và T_2 đều cho kết quả dương tính. Biết tỷ lệ hiện hành bệnh B trong cộng đồng theo số liệu dịch tễ học là 0,001; tính khả năng người này mắc bệnh B.

Dùng công thức Bayes để tính toán kết quả:

Giả thiết của bài toán cho ta biết

$$P\left(T_1^{+} \mid B^{+}\right)=0,93;$$

$$P\left(T_1^{-} \mid B^{-}\right)=0,95 \text{ suy ra } P\left(T_1^{+} \mid B^{-}\right)=0,05;$$

$$P\left(T_2^{+} \mid B^{-}\right)=0,07;$$

$$P\left(T_2^{-} \mid B^{+}\right)=0,05 \text{ suy ra } P\left(T_2^{+} \mid B^{+}\right)=0,95;$$

$$P\left(B^{+}\right)=0,001 \text{ suy ra } P\left(B^{-}\right)=0,999.$$

Theo công thức xác suất đầy đủ

$$P\left(T_1^{+}\right)=P\left(B^{+}\right)P\left(T_1^{+} \mid B^{+}\right)+P\left(B^{-}\right)P\left(T_1^{+} \mid B^{-}\right)=0,001.0,93+0,999.0,05=\frac{159}{3125}$$

Khi biết xét nghiệm T_1 dương tính ta có các xác suất hậu nghiệm của các biến cố B^{+}, B^{-} thay đổi theo công thức Bayes như sau:

$$P\left(B^{+} \mid T_1^{+}\right)=\frac{P\left(B^{+}\right).P\left(T_1^{+} \mid B^{+}\right)}{P\left(T_1^{+}\right)}=\frac{0,001.0,93}{\frac{159}{3125}}=\frac{31}{1696}$$

$$P\left(B^{-} \mid T_1^{+}\right)=\frac{P\left(B^{-}\right).P\left(T_1^{+} \mid B^{-}\right)}{P\left(T_1^{+}\right)}=\frac{0,999.0,05}{\frac{159}{3125}}=\frac{1665}{1696}$$

Các xác suất này lại được coi là xác suất tiên nghiệm đối với xét nghiệm T_2, áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$P\left(T_2^{+}\right)=P\left(T_2^{+} \mid B^{+}T_1^{+}\right).P\left(B^{+} \mid T_1^{+}\right)+P\left(T_2^{+} \mid B^{-}T_1^{+}\right).P\left(B^{-} \mid T_1^{+}\right)$$

Xét nghiệm T_2 độc lập với T_1 nên

$$P\left(T_2^{+} \mid B^{+}T_1^{+}\right)=P\left(T_2^{+} \mid B^{+}\right)=0,95; P\left(T_2^{+} \mid B^{-}T_1^{+}\right)=P\left(T_2^{+} \mid B^{-}\right)=0,07$$

Do đó

$$P\left(T_2^{+}\right)=0,95.\frac{31}{1696}+0,07.\frac{1665}{1696}=\frac{73}{848}$$

Cuối cùng theo công thức Bayes

$$P\left(B^+ \mid T_1^+ T_2^+\right) = \frac{P\left(T_2^+ \mid B^+ T_1^+\right).P\left(B^+ \mid T_1^+\right)}{P\left(T_2^+\right)} = \frac{0{,}95.\dfrac{31}{1696}}{\dfrac{73}{848}} = \frac{403}{2920} \approx 13{,}8\%.$$

Có thể thấy rằng, nếu chỉ dựa vào kết quả dương tính của xét nghiệm T_1 thì tính được xác suất người được xét nghiệm mắc bệnh là khá thấp ($P\left(B^+ \mid T_1^+\right) = \dfrac{31}{1696} \approx 1{,}83\%$ thấp hơn rất nhiều so với độ nhạy 93% của T_1), còn nếu dựa vào cả 2 kết quả dương tính của T_1 và T_2 thì khả năng người được xét nghiệm bị bệnh cũng không cao, đó là một đặc điểm của y học hiện đại - tính bất định trong bất cứ đo lường nào, bất cứ xét nghiệm nào và bất cứ chẩn đoán nào [7].

5. KẾT LUẬN

Bài báo trình bày một số ứng dụng mang tính thực tiễn cao của công thức xác xuất đầy đủ và công thức Bayes trong việc giải các bài toán xác suất như: tìm kiếm cứu hộ, rút thăm may mắn, Monty Hall, xét nghiệm y khoa, v.v. Bằng lời giải chặt chẽ và tổng quát đã thu được các kết quả chính xác và thú vị. Hy vọng bài báo sẽ là tài liệu tham khảo bổ ích trong việc giảng dạy và học tập môn Xác suất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bayes M., Price M. - An essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances. By the Late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. Communicated by Mr. Price, in a Letter to John Canton, A. M. F. R. S., Philosophical Transactions (1683-1775) **53** (1763) 370-418.
2. Nguyễn Bá Đô, Nguyễn Hồng Minh - Các câu chuyện toán học tập 1: Tất nhiên trong ngẫu nhiên, NXB Giáo dục (2003) 83-88.
3. Trần Kim Thanh, Lê Trường Giang - Lý thuyết xác suất và thống kê toán, Trường Đại học Tài chính - Marketing (2017) 31-32.
4. Nguyễn Văn Mậu - Mười vạn câu hỏi vì sao: Toán học, NXB Giáo dục Việt Nam (2018) 116-117.
5. Đặng Hùng Thắng - Một số ứng dụng của định lý Bayes, Thông tin Toán học **19** (2) (2015) 26-30.
6. Flam F.D. - The odds continually updated, The New York Times, September 29 (2014) (truy cập tại: https://www.nytimes.com/2014/09/30/science/the-odds-continually-updated.html)
7. Nguyễn Văn Tuấn - Giới thiệu phương pháp phân tích Bayes phần 1: Diễn giải kết quả chẩn đoán, Thời sự Y học số **62** (2011) 30-35.

ABSTRACT

SOME APPLICATIONS OF TOTAL PROBABILITY THEOREM
AND BAYES' THEOREM

Nguyen Dinh Inh
Ho Chi Minh City University of Food Industry
Email: *inhnd@hufi.edu.vn*

The total probability theorem and the Bayes' theorem are important and interesting contents taught in probability at the university. In the first part of this article, we use the total probability theorem and the Bayes' theorem to solve some well-known elementary probability problems, such as the problem of fairness in the lucky draw, the Monty Hall problem. As for the lucky draw problem, we present a tighter and more general solution than the known solutions. At the end of the article, we will introduce some applications of the Bayesian theorem in medicine and search and rescue operations. Hopefully this article will bring some useful things for those who are starting to teach or study probability.

Keywords: Total probability theorem, Bayes' theorem, lucky draw, Monty Hall, search and rescue operations.