

DOI:10.22144/ctu.jsi.2020.091

MÔ HÌNH NGẪU NHIÊN CHO SỰ LAN TRUYỀN VIRUS CORONA

Nguyễn Hữu Khánh^{1*} và Nguyễn Dương Phương Thành²

¹Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ

²Trường PTTH chuyên Lý Tự Trọng, Thành phố Cần Thơ

*Người chịu trách nhiệm về bài viết: Nguyễn Hữu Khánh (email: nhkhanh@ctu.edu.vn)

Thông tin chung:

Ngày nhận bài: 04/03/2020

Ngày nhận bài sửa: 29/04/2020

Ngày duyệt đăng: 29/06/2020

Title:

Stochastic model for the transmission of Corona vivus

Từ khóa:

Điểm cân bằng tự do, điểm cân bằng bệnh, tính ổn định mũ hầu chắc chắn

Keywords:

Almost surely exponentially stable, endemic equilibrium, free-disease equilibrium

ABSTRACT

This article is aimed to study the transmission of corona virus in which exposed group can cause infection and a recovered individual can be relapsed. The model is given by a system of stochastic differential equations. Mathematical analysis shows that the dynamic of transmission is determined by the basic reproduction R_0 and a threshold value R_σ . For $R_\sigma < 1$ then the transmission goes extinct, while $R_0 > 1$ then the transmission remains. Differential operator and Lyapunov theory are used to prove the stability and persistence of equilibria. Numerical investigation is carried out to confirm the analytical results.

TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu sự lan truyền virus cúm corona trong đó nhóm ủ bệnh có khả năng lây nhiễm và nhóm bình phục có thể tái nhiễm. Mô hình cho bởi hệ phương trình vi phân ngẫu nhiên. Phân tích toán học chỉ ra rằng động lực của sự lan truyền được quyết định bởi số sinh sản cơ sở R_0 và giá trị ngưỡng R_σ . Khi $R_\sigma < 1$, sự lan truyền tắt dần, còn khi $R_0 > 1$, sự lan truyền vẫn còn trong cộng đồng. Toán tử vi phân và lý thuyết hàm Lyapunov được sử dụng để chứng minh tính ổn định và bền vững của các điểm cân bằng. Khảo sát số được thực hiện để khẳng định cho các kết quả lý thuyết.

Trích dẫn: Nguyễn Hữu Khánh và Nguyễn Dương Phương Thành, 2020. Mô hình ngẫu nhiên cho sự lan truyền virus Corona. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 56(Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên)(1): 36-45.

1 GIỚI THIỆU

Virus corona là một loại virus thuộc phân họ *Coronavirinae* trong họ *Coronaviridae*, theo bộ *Nidovirales*. Virus corona gây bệnh ở các loài động vật có vú, bao gồm cả con người và chim. Ở người, virus gây nhiễm trùng đường hô hấp thường là nhẹ nhưng trong trường hợp ít gặp có thể gây tử vong. Virus này thường gây ra các triệu chứng cảm lạnh thông thường, nhiễm trùng mũi, xoang hoặc cổ họng và lây lan qua hắt hơi, ho. Tuy nhiên, nó có thể dẫn đến các bệnh hô hấp nghiêm trọng hơn ví dụ như hội

chúng hô hấp cấp tính nặng (SARS) và gây tử vong. Cuối năm 2019, một loại virus corona chủng mới xuất hiện ở thành phố Vũ Hán, tỉnh Hồ Bắc, Trung Quốc và lan truyền ra toàn thế giới. Virus này có đặc điểm là người ủ bệnh có thể gây nhiễm, người khỏi bệnh có thể bị tái nhiễm, virus lan truyền với tốc độ rất nhanh nhưng tỷ lệ tử vong lại không cao lắm (khoảng 3%). Nghiên cứu cơ chế lan truyền của virus corona là vấn đề mà mọi người hiện nay đang quan tâm.

Mô hình toán học về sự lan truyền virus được bắt đầu nghiên cứu năm 1911 bởi Ross (được giới thiệu lại trong Canning *et al.* (1999). Năm 2003, Neil (2003) xây dựng mô hình đầu tiên cho sự lan truyền của virus cúm. Fraser (2009) và Khanh (2014) nghiên cứu mô hình lan truyền cúm A (H1N1). Zhang (2017) phân tích mô hình lan truyền virus với vaccine. Gần đây, Khanh (2016) xét tính ổn định của mô hình virus cúm với sự kháng bệnh. Rất nhiều mô hình toán học cho sự lan truyền virus được đề xuất theo các đặc tính khác nhau của từng loại bệnh và tính chất lan truyền. Driessche *et al.* (2002) giới thiệu phương pháp hữu hiệu để xác định số sinh sản cơ sở R_0 , một nhân tố quyết định cho sự lan truyền.

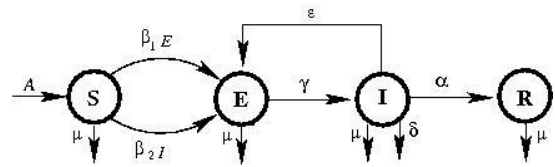
Tính ổn định của các điểm cân bằng là vấn đề then chốt được tập trung nghiên cứu trong rất nhiều bài báo (Canning, 1999; Mao, 2007; Qiao và Zhichun, 2017). Lúc ban đầu các nhà toán học chỉ xét tính ổn định địa phương. Sau đó được phát triển qua tính ổn định toàn cục thông qua sử dụng phương pháp hàm Lyapunov và phương pháp hình học (Li, 1995). Gần đây một số tác giả quan tâm tới tính ổn định ngẫu nhiên vì nó cho ra kết quả gần với thực tế hơn (Lahrouz *et al.*, 2011; Lei and Yang, 2016; Zhang *et al.*, 2017; Mohamed *et al.*, 2018).

Bài báo này khảo sát mô hình ngẫu nhiên cho sự lan truyền virus corona. Mô hình này có tính đặc biệt là cá thể ủ bệnh có thể gây nhiễm bệnh, cá thể hết bệnh có thể tái nhiễm và tốc độ lan truyền virus ra cộng đồng rất nhanh chóng. Mô hình cho bởi hệ các phương trình vi phân ngẫu nhiên. Chúng tôi chỉ ra nhân tố xác định sự lan truyền là số sinh sản cơ sở R_0 và giá trị ngưỡng ngẫu nhiên R_σ . Khi $R_\sigma < 1$, sự lan truyền tắt dần, còn khi $R_0 > 1$, sự lan truyền vẫn còn trong cộng đồng. Toán tử vi phân và hàm Lyapunov là công cụ chính được sử dụng trong các chứng minh. Bài báo chứng minh sự tồn tại và đáng điều của nghiệm của hệ ngẫu nhiên. Khẳng định được tính ổn định và bền vững của các điểm cân bằng. Các kết quả lý thuyết đã giải thích được cơ chế của sự lan truyền. Khảo sát số bằng phần mềm Mathematica đã minh họa cho các kết quả lý thuyết.

2 CẤU TRÚC MÔ HÌNH

2.1 Mô hình tất định

Xét sự lan truyền của virus cúm corona trong cộng đồng trong đó nhóm ủ bệnh có khả năng lây nhiễm và nhóm bình phục có thể tái nhiễm. Tổng thể với số lượng A được chia thành các nhóm: nhóm có khả năng nhiễm virus với số lượng $S(t)$, nhóm ủ bệnh với số lượng $E(t)$, nhóm nhiễm bệnh với số lượng $I(t)$ và nhóm bình phục với số lượng $R(t)$.



Hình 1: Biểu đồ dòng cho mô hình

Mô hình tất định cho bởi hệ các phương trình vi phân sau:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= A - (\beta_1 E + \beta_2 I)S - \mu S \\ \frac{dE}{dt} &= (\beta_1 E + \beta_2 I)S - (\gamma + \mu)E + \varepsilon I \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma E - (\alpha + \delta + \varepsilon + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I - \mu R \end{aligned} \quad (1)$$

trong đó

A là số lượng tổng thể,

β_1 là tỷ lệ nhiễm bệnh gây nên từ nhóm ủ bệnh,

β_2 là tỷ lệ nhiễm bệnh gây nên từ nhóm bị nhiễm,

γ là tỷ lệ phát bệnh từ nhóm ủ bệnh,

ε là tỷ lệ tái nhiễm,

α là tỷ lệ bình phục,

δ là tỷ lệ chết vì bệnh,

μ là tỷ lệ chết tự nhiên.

Giả sử tổng thể có số lượng không đổi A . Ta có $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = A$.

Mô hình (1) được xét trên tập bất biến:

$$\mathbb{R}_+^4 = \{(S, E, I, R) : S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, R \geq 0\}.$$

Số sinh sản cơ sở (tham khảo Driessche, 2002 và Khanh, 2016) xác định bởi:

$$R_0 = \frac{A(\beta_1(\alpha + \delta + \varepsilon) + \beta_2\gamma)}{\mu[(\alpha + \delta)(\gamma + \mu) + \varepsilon\mu]}.$$

Để tìm các điểm cân bằng ta giải hệ với các biểu thức vế phải của (1) bằng 0. Ta tìm được hai điểm cân bằng:

* Điểm cân bằng tự do $P_0(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0)$;

* Điểm cân bằng bệnh $P^*(S^*, E^*, I^*, R^*)$ trong đó S^*, E^*, I^*, R^* là các nghiệm dương của hệ phương trình đã giải.

Bằng các phương pháp chứng minh tương tự như trong (Khanh, 2016) ta nhận được kết quả sau:

• $R_0 < 1$ thì điểm cân bằng tự do P_0 ổn định toàn cục và sự lan truyền tắt dần ;

• $R_0 > 1$ thì điểm cân bằng bệnh P^* ổn định toàn cục với điều kiện xác định và sự lan truyền vẫn còn trong cộng đồng.

2.2 Mô hình ngẫu nhiên

2.2.1 Cơ sở lý thuyết

Xét hệ ngẫu nhiên d -chiều

$$dX = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t) \quad (3)$$

trong đó $f(t, x)$ là hàm trong \mathbb{R}^d xác định trên $[t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$; $g(t, x)$ là ma trận cấp $d \times m$; f, g là các hàm Lipschitz địa phương theo $x, B(t)$ là quá trình Wiener tiêu chuẩn m -chiều xác định trên không gian xác suất Ω .

Kí hiệu $C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [t_0, +\infty); \mathbb{R}_+)$ là họ tất cả các hàm không âm $V(x, t)$ xác định trên $\mathbb{R}^d \times [t_0, +\infty)$ sao cho vi phân cấp hai liên tục theo x và vi phân cấp 1 liên tục theo t .

Ta định nghĩa toán tử vi phân sau:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d f_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d [g^T(x, t)g(x, t)]_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Cho toán tử vi phân L tác động lên hàm $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [t_0, +\infty); \mathbb{R}_+)$ ta có

$$LV(x, t) = V_t(x, t) + V_x(x, t)f(x, t) + \frac{1}{2} \text{trace}[g^T(x, t)V_{xx}g(x, t)],$$

trong đó $V_t(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t}, V_x(x, t) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \dots \frac{\partial V}{\partial x_d} \right)$ và

$$V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{d \times d}.$$

Theo công thức Itô nếu $x(t) \in \mathbb{R}^d$ thì

$$dV(x, t) = L(x, t)dt + V_x(x, t)g(x, t)dB(t) .$$

• Định nghĩa

Điểm cân bằng $x = 0$ của hệ (3) được gọi là ổn định mũ hầu chắc chắn nếu với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^d$ thì

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t, x_0)| < 0 \text{ h.c.c.}$$

Cho quá trình ngẫu nhiên $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ ta kí hiệu

$$\langle x \rangle_t = \frac{1}{t} \int_0^t x(s)ds .$$

• Bổ đề (Mohamed et al., 2018) *Nếu tồn tại một hàm xác định dương $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [t_0, +\infty); \mathbb{R}_+)$ sao cho $\limsup_{t \rightarrow \infty} \langle LV \rangle_t < 0$ thì nghiệm tầm thường của (3) hội tụ mũ hầu chắc chắn.*

2.2.2 Mô hình ngẫu nhiên

Bằng cách làm nhiều các tham số, mô hình ngẫu nhiên được cho bởi hệ các phương trình vi phân ngẫu nhiên sau:

$$\begin{aligned} dS &= [A - (\beta_1 E + \beta_2 I)S - \mu S]dt + \sigma_1 S dB_1 \\ dE &= [(\beta_1 E + \beta_2 I)S - (\gamma + \mu)E + \varepsilon I]dt + \sigma_2 E dB_2 \\ dI &= [\gamma E - (\alpha + \delta + \varepsilon + \mu)I]dt + \sigma_3 I dB_3 \\ dR &= [\alpha I - \mu R]dt + \sigma_4 R dB_4, \end{aligned} \quad (4)$$

trong đó B_1, B_2, B_3 và B_4 là các quá trình Wiener.

Định lí 1. *Với giá trị ban đầu $(S(0), E(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$, hệ (4) luôn tồn tại duy nhất nghiệm $(S(t), E(t), I(t), R(t))$ trên khoảng $t \geq 0$ với xác suất 1.*

Chứng minh

Vì các hệ số trong mô hình (4) liên tục Lipschitz địa phương nên với giá trị ban đầu $(S(0), E(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$ tồn tại duy nhất nghiệm $(S(t), E(t), I(t), R(t))$ trên khoảng $t \in [0, \tau_e)$, trong đó τ_e là thời gian bùng nổ (explosion time).

Để chứng minh nghiệm tồn tại một cách toàn cục ta sẽ chứng minh $\tau_e = +\infty$.

Cho $k_0 \in \mathbb{N}$ là số đủ lớn sao cho $S(0), E(0), I(0), R(0) \in \left(\frac{1}{k_0}, k_0\right)$. Với $k \geq k_0$, $k \in \mathbb{N}$ ta định nghĩa thời gian dừng

$$\tau_k = \inf \left\{ \begin{array}{l} t \in [0, \tau_e) : S(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k\right) \\ \text{hay } E(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k\right) \\ \text{hay } I(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k\right) \\ \text{hay } R(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k\right) \end{array} \right\}.$$

Ta thấy τ_k tăng khi $k \rightarrow \infty$. Đặt $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$ thì $\tau_\infty \leq \tau_e$ h.c.c.

Ta chứng minh $\tau_\infty = \infty$. Nếu ngược lại, tồn tại hai hằng số $T > 0$ và $\varepsilon \in (0, 1)$ sao cho

$$P\{\tau_\infty \leq T\} \geq \varepsilon \text{ với } k \geq k_0 \quad (5)$$

Định nghĩa C^2 - hàm $V : \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}_+^4$ như sau:

$$V(S, E, I, R) = (S - c - c \ln \frac{S}{c}) + (E - 1 - \ln E) + (I - 1 - \ln I) + (R - 1 - \ln R),$$

trong đó $c = \frac{\delta}{\beta_2}$. Theo công thức Itô ta có

$$dV = LVdt + (S - c)\sigma_1 dB_1 + (E - 1)\sigma_2 dB_2 + (I - 1)\sigma_3 dB_3 + (R - 1)\sigma_4 dB_4,$$

trong đó

$$\begin{aligned} LV &= \left(1 - \frac{c}{S}\right) [A - (\beta_1 E + \beta_2 I)S - \mu S] \\ &+ \left(1 - \frac{1}{E}\right) [(\beta_1 E + \beta_2 I)S - (\gamma + \mu)I + \varepsilon I] \\ &+ \left(1 - \frac{1}{I}\right) [\gamma E - (\alpha + \delta + \varepsilon + \mu)I] \\ &+ \left(1 - \frac{1}{R}\right) [\alpha I - \mu R] \\ &+ \frac{1}{2} (c\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= A - \frac{cA}{S} + c(\beta_1 E + \beta_2 I + \mu) \\ &- (\beta_1 E + \beta_2 I) \frac{S}{E} + (\gamma + \mu) \\ &- \varepsilon \frac{I}{E} - \delta I - \gamma \frac{E}{I} \\ &+ (\alpha + \delta + \varepsilon + \mu) - \alpha \frac{I}{R} \\ &+ \frac{1}{2} (c\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) \\ &\leq A + c(\beta_1 + \mu) + (c\beta_2 - \delta)I \\ &+ (\alpha + \delta + \varepsilon + 2\mu) \\ &+ \frac{1}{2} (c\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) \end{aligned}$$

Vi $c = \frac{\delta}{\beta_2}$ nên

$$\begin{aligned} LV &\leq A + \frac{\delta}{\beta_2} (\beta_1 + \mu) + (\alpha + \delta + \varepsilon + 2\mu) \\ &+ \frac{1}{2} (c\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) \triangleq K. \end{aligned}$$

Khi đó

$$dV \leq Kdt + (S - c)\sigma_1 dB_1 + (E - 1)\sigma_2 dB_2 + (I - 1)\sigma_3 dB_3 + (R - 1)\sigma_4 dB_4.$$

Áp dụng công thức Itô và kỳ vọng ta có

$$\begin{aligned} EV(S(\tau_k \wedge T), E(\tau_k \wedge T), I(\tau_k \wedge T), R(\tau_k \wedge T)) \\ \leq V(S(0), E(0), I(0), R(0)) \\ + E \int_0^{\tau_k \wedge T} LV(S(u), E(u), I(u), R(u)) du \\ = V(S(0), E(0), I(0), R(0)) + KT. \end{aligned}$$

Đặt $\Omega_k = \{\omega : \tau_k(\omega) \leq T\}$ với $k \geq k_1$. Theo (5) ta có $P(\Omega_k) \geq \varepsilon, \forall k \geq k_1$. Với mỗi $\omega \in \Omega_k$ ta có $S(\tau_k \wedge T, \omega)$ hoặc $E(\tau_k \wedge T, \omega)$ hoặc $I(\tau_k \wedge T, \omega)$ hoặc $R(\tau_k \wedge T, \omega)$ bằng k hoặc $1/k$. Từ đó

$$\begin{aligned} V(S(\tau_k \wedge T, \omega), E(\tau_k \wedge T, \omega), \\ I(\tau_k \wedge T, \omega), R(\tau_k \wedge T, \omega)) \end{aligned}$$

$$\geq \min \left\{ \begin{array}{l} k-1-\log k, \frac{1}{k}-1+\log k, k-\frac{\delta}{\beta_2} \\ -\frac{\delta}{\beta_2} \log \frac{k\beta_2}{\delta}, \frac{1}{k}-\frac{\delta}{\beta_2}-\frac{\delta}{\beta_2} \log \frac{\beta_2}{\delta k} \end{array} \right\} \equiv G_k.$$

Do đó

$$V(S(0), E(0), I(0), R(0)) + KT \geq E \left[\begin{array}{l} I_{\Omega_k} V(S(\tau_k \wedge T, \omega), E(\tau_k \wedge T, \omega), \\ I(\tau_k \wedge T, \omega), R(\tau_k \wedge T, \omega)) \end{array} \right] \geq \varepsilon G_k$$

trong đó I_{Ω_k} là hàm đặc trưng của Ω_k . Cho $k \rightarrow \infty$ thì

$$V(S(0), E(0), I(0), R(0)) + KT \geq +\infty.$$

Điều này vô lý. Do đó $\tau_\infty = \infty$ h.c.c. Vì vậy tồn tại duy nhất nghiệm $(S(0), E(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$ của hệ (4) trong khoảng $t \geq 0$ và nghiệm vẫn còn trong \mathbb{R}_+^4 với xác suất 1. \square

3 ỔN ĐỊNH MŨ HẦU CHẮC CHẮN

Hệ (4) luôn có điểm cân bằng $P_0(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0)$. Ta xét trên tập hợp các đường dẫn mẫu sau:

$$\Phi = \{ \omega \in \Omega : S(t, \omega), E(t, \omega), I(t, \omega), R(t, \omega) \in \mathbb{R}_+^4, t \geq 0 \}$$

trong đó Ω là không gian xác suất.

Từ định lí 1 ta thấy $P(\Omega \setminus \Phi) = \emptyset$. Trong phần tiếp theo ta xét các đường dẫn mẫu hạn chế trên Φ .

Định lí 2. Nếu $(S(0), E(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$ thì $S(t) \leq \frac{A}{\mu}, \forall t > 0$ hầu chắc chắn (h.c.c).

Chứng minh

Với đường dẫn trong Φ ta có

$$\begin{aligned} \frac{d(S - \frac{A}{\mu})}{dt} &= -\mu(S - \frac{A}{\mu}) - c(\beta_1 E + \beta_2 I)S \\ &\leq -\mu(S - \frac{A}{\mu}). \end{aligned}$$

Do đó $S(0) < \frac{A}{\mu}$. Suy ra $S(t) < K$ với $t > 0$.

• Giá trị ngưỡng R_σ của mô hình (4)

Đặt $m_1 = \beta_1(\alpha + \varepsilon + \mu) + \beta_2\gamma$, $m_2 = \beta_1\varepsilon + \beta_2(\gamma + \mu)$. Ta định nghĩa hàm $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ như sau:

$$r(u) = \frac{m_1 m_2 (\sigma_2 u)^2 + \sigma_3^2 (1-u)^2}{2[\beta_1 m_2 u + \beta_2 m_1 (1-u)]}.$$

Ta thấy r là hàm dương và liên tục. Do đó r có minimum, kí hiệu là r_* . Dễ thấy $r_* > 0$. Ta định nghĩa giá trị ngưỡng:

$$R_\sigma = \frac{A[\beta_1(\alpha + \delta + \varepsilon) + \beta_2\gamma]}{\mu[(\alpha + \delta)(\gamma + \mu) + \varepsilon\mu]} + r_*.$$

• **Định lí 3.** Nếu $R_\sigma < 1$ thì hạn chế trên Φ các thành phần E và I hội tụ mũ về 0 hầu chắc chắn.

Chứng minh

Ta định nghĩa các hàm

$$Q(t) = m_1 E(t) + m_2 I(t) \text{ và } W(t) = \ln Q(t).$$

Ta có

$$\begin{aligned} LW &= \frac{m_1}{Q} [(\beta_1 E + \beta_2 I)S - (\gamma + \mu)E + \varepsilon I] \\ &+ \frac{m_2}{Q} [\gamma E - (\alpha + \varepsilon + \mu)I] \\ &- \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m_1 \sigma_1 E}{Q} \right)^2 + \left(\frac{m_2 \sigma_2 I}{Q} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{E}{Q} \right\rangle_{t_n} \text{ và } i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{I}{Q} \right\rangle_{t_n} \text{ thì}$$

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \langle LW \rangle_t &= m_1 [(\beta_1 e + \beta_2 i)s - (\gamma + \mu)e + \varepsilon i] \\ &+ m_2 [\gamma e - (\alpha + \varepsilon + \mu)i] \\ &- \frac{1}{2} [(m_1 \sigma_1 e)^2 + (m_2 \sigma_2 i)^2]. \end{aligned}$$

Đặt $m = (\alpha + \mu)(\gamma + \mu) + \varepsilon\mu$. Tiến hành ước lượng và đơn giản ta nhận được

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \langle LW \rangle_t &< m_1 \frac{A}{\mu} (\beta_1 e + \beta_2 i) \\ &- m(\beta_1 e + \beta_2 i) - \frac{1}{2} [(m_1 \sigma_1 e)^2 + (m_2 \sigma_2 i)^2]. \end{aligned}$$

Vì

$$(m_1\sigma_1e)^2 + (m_2\sigma_2i)^2 = \frac{(m_1\sigma_1e)^2 + (m_2\sigma_2i)^2}{\beta_1e + \beta_2i}$$

và $m_2i = 1 - m_1e$ nên ta có

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \langle LW \rangle_t < \frac{A}{\mu} m_1(\beta_1e + \beta_2i) - m(\beta_1e + \beta_2i) - r(m_1e)(\beta_1e + \beta_2i).$$

Do đó

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \langle LW \rangle_t &< \frac{A}{\mu} m_1(\beta_1e + \beta_2i) - m(\beta_1e + \beta_2i) - r_*(\beta_1e + \beta_2i) \\ &= m(R_\sigma - 1)(\beta_1e + \beta_2i) < 0. \quad \square \end{aligned}$$

• **Định lí 4.** Nếu $R_\sigma < 1$ thì điểm cân bằng bệnh tự do P_0 ổn định mũ hầu chắc chắn.

Chứng minh

Ta chứng minh bằng phản chứng.

Theo định lí 3 ta thấy $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$ và

$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ h.c.c. Ta giả sử tồn tại tập $\Phi_0 \subset \Phi$ với $P(\Phi_0) > 0$ sao cho trên Φ_0 thì

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{A}{\mu} - S(t) \right) + R(t) \right] \neq 0. \quad (5)$$

Theo trên và định nghĩa của e và i thì trên Φ_0 ta có $e = 0$ h.c.c và $i = 0$ h.c.c. Tiến hành các bước tương tự như chứng minh trong định lí 3, đặt

$$Q_0 = \left(\frac{A}{\mu} - S \right) + E + I + R \quad \text{và} \quad W_0 = \ln(Q_0).$$

Ta được

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \langle LW_0 \rangle_t < -\mu(p+r) - \frac{1}{2}(\sigma_4r)^2 \quad \text{h.c.c,}$$

trong đó $p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\frac{A}{\mu} - S}{Q_0} \right\rangle_{t_n}$ và

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{R}{Q_0} \right\rangle_{t_n}.$$

Do đó $\limsup_{t \rightarrow \infty} \langle LW_0 \rangle_t < 0$. Vì vậy trên Φ_0 ta phải

$$\text{có } \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\mu} - S \right) = 0 \text{ h.c.c và } \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0 \text{ h.c.c.}$$

Điều này mâu thuẫn với (5). Vậy định lí được chứng minh xong. \square

• **Nhận xét 1**

Theo định lí 4, khi $R_\sigma < 1$, điểm cân bằng tự do P_0 ổn định mũ hầu chắc chắn. Khi đó các nghiệm của (4) đều dần về P_0 nên thành phần nhiễm bệnh $I(t) \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow \infty$. Do đó sự lan truyền virus tắt dần.

4 DÁNG ĐIỀU ỔN ĐỊNH CHUNG QUANH ĐIỂM CÂN BẰNG BỆNH

Hệ tất định (1) luôn có điểm cân bằng $P_0(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0)$. Khi $R_0 > 1$ hệ có thêm điểm cân bằng $P^*(S^*, E^*, I^*, R^*)$.

Để thuận lợi trong việc chứng minh định lí 5 dưới đây ta định nghĩa một số tham số sau:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2\varepsilon I^* + \beta_2 S^* E^*}{\gamma E^*}, \quad d_1 = 1 + \frac{2\mu + \alpha}{\varepsilon}, \\ d_2 &= \mu + \frac{(\mu + \gamma)(2\mu + \alpha)}{\varepsilon}, \\ d_3 &= 2\mu + \frac{(2\mu + \gamma)(2\mu + \alpha)}{\varepsilon}, \quad d_4 = \frac{2d_3}{\beta_1}. \end{aligned}$$

• **Định lí 5.** Cho $(S(t), E(t), I(t), R(t))$ là nghiệm của hệ (4) với giá trị ban đầu $(S(0), E(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$ và

$P^*(S^*, E^*, I^*, R^*)$ là điểm cân bằng bệnh của mô hình tất định (1). Nếu $R_\sigma > 1$ và $2\mu > \alpha$ thì nghiệm của (5) thỏa:

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t & \left[(S(s) - S^*)^2 + (E(s) - E^*)^2 \right. \\ & \left. + (I(s) - I^*)^2 + (R(s) - R^*)^2 \right] ds \leq \frac{M}{\lambda}, \end{aligned}$$

trong đó $\lambda = 2 \min\{\mu d_1, d_2, \mu, 2\mu - \alpha\}$ và

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{A}{\mu} \right)^2 (\sigma_1^2 d_1 + \sigma_2^2 d_2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_4^2) \\ &+ \frac{1}{2} d_4 (S^* \sigma_1^2 + 2E^* \sigma_2^2 + 2I^* \sigma_2^2). \end{aligned}$$

Chứng minh

Ta thấy điểm cân bằng bệnh $P^*(S^*, E^*, I^*, R^*)$ có các tọa độ là nghiệm không tầm thường của (1) và thỏa

$$\begin{aligned} A &= \mu S^* + \mu E^* + (\alpha + \mu) I^* \\ A &= \mu S^* + (\alpha + \mu) E^* - \varepsilon I^* \\ \mu &= \alpha \frac{I^*}{R^*}. \end{aligned}$$

Ta xét hàm sau

$$U(S, E, I, R) = U_1 + U_2 + U_3 + U_4,$$

trong đó

$$U_1 = [(S - S^*) + (E - E^*) + (I - I^*) + (R - R^*)]^2,$$

$$U_2 = \frac{\alpha + 2\mu}{\varepsilon} [(S - S^*) + (E - E^*)]^2,$$

$$U_3 = 2(R - R^*)^2,$$

$$\begin{aligned} U_4 &= d_4 \left(S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} \right) \\ &+ 2d_4 \left(E - E^* - E^* \ln \frac{E}{E^*} \right) \\ &+ ad_4 \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right) \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \int_0^t dU(S, E, I, R) &= \int_0^t LUdu + H_t \\ &= \int_0^t LU_1 + LU_2 + LU_3 + LU_4 du + H_t, \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} H_t &= \int_0^t 2[(S - S^*) + (E - E^*) + (I - I^*)] \\ &\cdot (\sigma_1 S dB_1(u) + \sigma_2 E dB_2(u) + \sigma_3 I dB_3(u)) \\ &+ \int_0^t 2 \frac{\alpha + 2\mu}{\varepsilon} [(S - S^*) + (I - I^*)] \\ &\cdot (\sigma_1 S dB_1(u) + \sigma_2 E dB_2(u)) \\ &+ \int_0^t d_4 (S - S^*) \sigma_1 dB_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \int_0^t 2d_4 (E - E^*) \sigma_2 dB_2(u) \\ &+ \int_0^t ad_4 (I - I^*) \sigma_3 dB_3(u) + \int_0^t 4(R - R^*) \sigma_4 dB_4(u). \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} LU_1 &= 2[(S - S^*) + (E - E^*) + (I - I^*)] \\ &\cdot [-\mu(S - S^*) - \mu(E - E^*) - (\alpha + \mu)(I - I^*)] \\ &+ (\sigma_1^2 S^2 + \sigma_2^2 E^2 + \sigma_3^2 I^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} LU_2 &= 2 \frac{\alpha + 2\mu}{\varepsilon} [(S - S^*) \\ &+ (I - I^*)] \cdot [-\mu(S - S^*) \\ &- (\gamma + \mu)(E - E^*) + \varepsilon(I - I^*)] \\ &+ \frac{\alpha + 2\mu}{\varepsilon} (\sigma_1^2 S^2 + \sigma_2^2 E^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} LU_3 &= 4(R - R^*)[\alpha(I - I^*) - \mu(R - R^*)] \\ &+ 2\sigma_4^2 R^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} LU_4 &= \mu S^* d_4 \left(2 - \frac{S}{S^*} - \frac{S^*}{S} \right) \\ &- d_4 \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) \beta_1 (SE - S^* E^*) \\ &- d_4 \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) \beta_2 (SI - S^* I^*) \\ &+ 2d_4 \beta_1 (S - S^*)(E - E^*) \\ &+ 2d_4 \left(1 - \frac{I^*}{I} \right) \beta_2 (SI - S^* I^* \frac{E}{E^*}) \\ &+ 2d_4 \varepsilon \left(1 - \frac{E^*}{E} \right) \left(I - I^* \frac{E}{E^*} \right) \\ &+ ad_4 \left(1 - \frac{I^*}{I} \right) \left(\gamma E - \gamma E^* \frac{I}{I^*} \right). \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} LU &= LU_1 + LU_2 + LU_3 + LU_4 \\ &= -2\mu d_1 (S - S^*)^2 - 2d_2 (E - E^*)^2 \\ &- 2(\alpha + \mu)(I - I^*)^2 - 2d_3 (S - S^*)(E - E^*) \end{aligned}$$

$$+ 4\alpha(I - I^*)(R - R^*) - 4\mu(R - R^*)^2 + \sigma_1^2 S^2 d_1 + \sigma_2^2 E^2 d_1 + \sigma_3^2 I^2 + 2\sigma_4^2 R^2 + LU_4.$$

Ước lượng biểu thức trên ta được

$$LU \leq -2\mu d_1(S - S^*)^2 - 2d_2(E - E^*)^2 - 2\mu(I - I^*)^2 - 2(2\mu - \alpha)(R - R^*)^2 + \left(\frac{A}{\mu}\right)^2 (\sigma_1^2 d_1 + \sigma_2^2 d_1 + \sigma_3^2 + 2\sigma_4^2) + \frac{1}{2}d_4(S^* \sigma_1^2 + 2E^* \sigma_2^2 + aI^* \sigma_3^2).$$

Do đó

$$\int_0^t dU \leq \int_0^t \left[-2\mu d_1(S - S^*)^2 - 2d_2(E - E^*)^2 - 2\mu(I - I^*)^2 - 2(2\mu - \alpha)(R - R^*)^2 + \left(\frac{A}{\mu}\right)^2 (\sigma_1^2 d_1 + \sigma_2^2 d_1 + \sigma_3^2 + 2\sigma_4^2) + \frac{1}{2}d_4(S^* \sigma_1^2 + 2E^* \sigma_2^2 + aI^* \sigma_3^2) \right] du + H_t.$$

Lấy kỳ vọng và chú ý $E(H_t) = 0$ ta nhận được

$$0 \leq E[U(S(t), E(t), I(t), R(t))] \leq E[U(S(0), E(0), I(0), R(0))] + E \int_0^t \left[-2\mu d_1(S - S^*)^2 - 2d_2(E - E^*)^2 - 2\mu(I - I^*)^2 - 2(2\mu - \alpha)(R - R^*)^2 + M \right] du.$$

Từ đó

$$E \int_0^t \left[2\mu d_1(S(u) - S^*)^2 + 2d_2(E(u) - E^*)^2 + 2\mu(I(u) - I^*)^2 + 2(2\mu - \alpha)(R(u) - R^*)^2 + M \right] du \leq E[U(S(0), E(0), I(0), R(0))] + Mt.$$

Do đó

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t \left[2\mu d_1(S(u) - S^*)^2 + 2d_2(E(u) - E^*)^2 + 2\mu(I(u) - I^*)^2 + 2(2\mu - \alpha)(R(u) - R^*)^2 + M \right] du \leq M.$$

Chọn $\lambda = 2 \min\{\mu d_1, d_2, \mu, 2\mu - \alpha\}$ ta nhận được

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t \left[(S(\tau) - S^*)^2 + (E(\tau) - E^*)^2 + (I(\tau) - I^*)^2 + (R(\tau) - R^*)^2 \right] d\tau \leq \frac{M}{\lambda}. \quad \square$$

• Nhận xét 2

Theo định lí 5, với các giá trị tham số được làm nhiều đủ bé, nghiệm của hệ (4) rất gần với điểm cân bằng bệnh P^* của mô hình tất định (1). Khi $R_0 > 1$, điểm cân bằng bệnh P^* của hệ tất định (1) ổn định toàn cục và các nghiệm của (4) dần về P^* khi $t \rightarrow \infty$ nên thành phần nhiễm bệnh $I(t)$ dần về $I^* > 0$. Do đó sự lan truyền virus vẫn còn trong cộng đồng.

5 KHẢO SÁT SỐ CHO MÔ HÌNH NGẪU NHIÊN

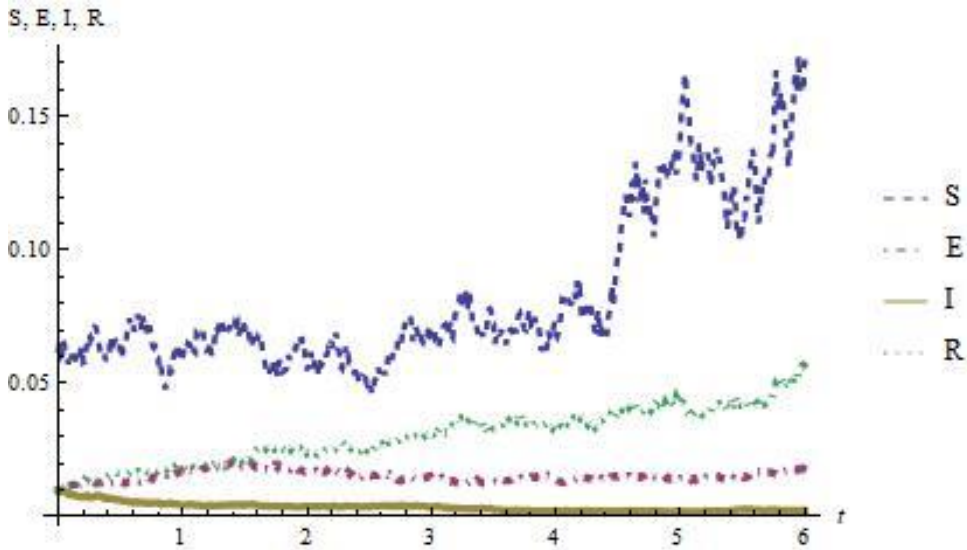
Trong phần này ta tiến hành khảo sát số cho mô hình ngẫu nhiên (4). Phần mềm toán học Mathematica được sử dụng cho khảo sát.

5.1 Sự lan truyền tất dần

Ta chọn bộ tham số sau:

$$A = 1, \alpha = 0.5, \beta_1 = \beta_2 = 0.95, d = 0.3, \varepsilon = 0.3, \gamma = 0.4, \mu = 0.1, \sigma_1 = 0.2, \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0.1.$$

Theo (2) ta xác định được số sinh sản cơ sở $R_0 = 0.3742$ và suy ra $R_\sigma = 0.3921 < 1$. Theo kết quả của định lí 4, điểm cân bằng tự do P_0 ổn định mũ hầu chắc chắn. Hình 2 cho thấy thành phần nhiễm bệnh $I(t)$ (đường liền nét) dần về 0 khi $t \rightarrow \infty$. Do đó sự lan truyền virus tất dần.



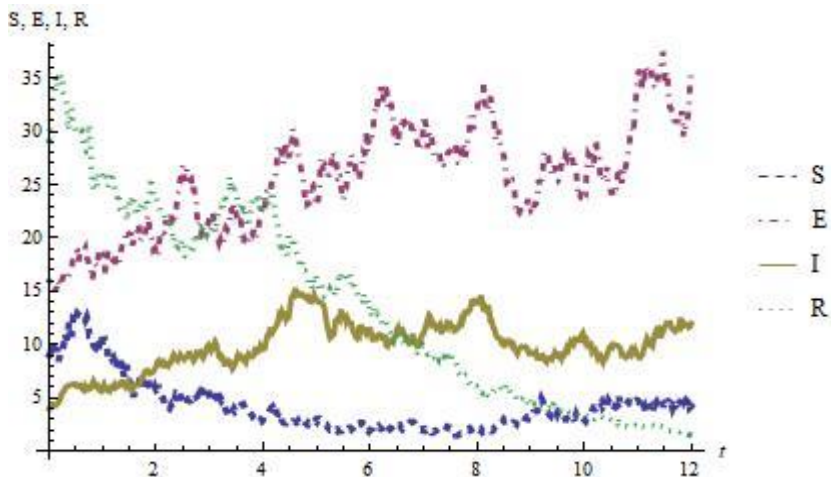
Hình 2: Các thành phần nghiệm của hệ (4) trong trường hợp sự lan truyền tắt dần

5.2 Sự lan truyền vẫn còn

Chọn bộ tham số sau:

$$A = 1, \alpha = 0.5, \beta_1 = 0.9, \beta_2 = 0.8, d = 0.3, \varepsilon = 0.55, \gamma = 0.5, \mu = 0.1, \sigma_1 = 0.2, \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0.1.$$

Theo (2) ta xác định được số sinh sản cơ sở $R_0 = 1.755 > 1$. Theo kết quả của mô hình tắt định (1), điểm cân bằng bệnh P^* ổn định toàn cục. Lại theo định lí 4 thì các nghiệm của hệ (4) rất gần với P^* . Do đó thành phần nhiễm bệnh $I(t)$ sẽ dần về $I^* > 0$. Vì vậy sự lan truyền virus vẫn còn trong hệ thống. Hình 3 cho thấy thành phần nhiễm bệnh $I(t)$ (đường liền nét) dần về giá trị dương khi $t \rightarrow \infty$.



Hình 3: Các thành phần nghiệm của hệ (4) trong trường hợp sự lan truyền vẫn còn

6 KẾT LUẬN

Bài báo đã trình bày sự tồn tại và đáng điệu nghiệm của mô hình ngẫu nhiên. Định lí 4 cho thấy sự hội tụ dạng mũ của nghiệm hệ (4) đến điểm cân bằng tự do. Với giá trị tham số làm nhiều đủ nhỏ, tính ổn định của điểm cân bằng tự do P_0 nhận được ở miền lớn hơn giá trị của số sinh sản cơ sở R_0 của

hệ tắt định, tức là trên khoảng $R_\sigma < 1$ chứ không phải khoảng $R_0 < 1$. Đây là hiện tượng thường thấy trước đây khi mô phỏng mô hình tắt định nhưng không giải thích được. Định lí 5 cho ta phương pháp chỉ ra nghiệm của hệ ngẫu nhiên rất gần với điểm cân bằng bệnh P^* để khẳng định sự lan truyền vẫn còn. Toán tử vi phân cùng với phương pháp hàm Lyapunov là công cụ hiệu quả giúp cho việc nghiên

cứu mô hình ngẫu nhiên. Mô hình ngẫu nhiên cho ta các kết quả gần với thực tế hơn so với mô hình tất định. Việc khảo sát mô hình giúp cho các nhà quản lý có biện pháp hạn chế sự lan truyền virus bằng cách điều chỉnh các tham số sao cho $R_\sigma < 1$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Cannings, C., Hoppensteadt, F.C. and Segel, L.A., 1999. Epidemic Modelling: An introduction. Cambridge University Press.
- Driessche, P. and Watmough, P., 2002. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*. 180(1-2): 29-48.
- Fraser, C., Donnelly, C.A., Cauchemez, S., et al. (2009). Pandemic potential of a strain of influenza A (H1N1): early findings. *Science*, 324(5934): 1557-1561.
- Khanh, N.H., 2014. Stability analysis of a transmission model for influenza virus A (H1N1). *International Journal of Scientific & Engineering Research*. 5(8): 205-209.
- Khanh, N. H., 2016. Stability analysis of an influenza virus model with disease resistance. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*. 24: 193-199.
- Khanh, N.H., 2016. Stability analysis of a computer virus propagation model with antidote in vulnerable system. *Acta Mathematica Scientia*. 36B(1):49-61.
- Lahrouz, A., Omari, L. and Kiouach, D., 2011. Global analysis of a deterministic and stochastic nonlinear SIRS epidemic model. *Nonlinear Analysis*. 16 (1): 59-76.
- Lei, Q. and Yang, Z., 2016. Dynamical behaviors of a stochastic SIRS epidemic model. *Applicable Analysis*. 96(16): 2758-2770.
- Li, M.Y. and Muldowney, J.S., 1995. Global stability for the SEIR model in epidemiology. *Mathematical Bioscience*. 125: 155-164.
- Mao, X. 2007, Stochastic differential equations and applications. Horwood Publishing.al., 2003.
- El Fatini, M., Lahrouz, A., Pettersson, R., Settati, A. and Taki, R., 2018. Stochastic stability and instability of an epidemic model with relapse. *Applied Mathematics and Computation*. 316: 326-341.
- Neil, M.F., Susan. M., et al., 2003. A population dynamic model for evaluating the potential spread of drug-resistant influenza virus infections during community-base use of antivirals. *J. Antimicrob. Chemother*. 51: 977-990.
- Lei, Q. and Yang, Z., 2017. Dynamical behaviors of a stochastic SIRS epidemic model. *Applicable Analysis*, 96(16): 2758-2770.
- Zhang, X.B., Huo, F.H., Xiang, H. and Shi, Q., 2017. The threshold of a stochastic SIQS epidemic model. *Physica A*. 482: 362-374.
- Zhang, X, Jiang, D., Hayat, T. and Ahmad, B., 2017. Dynamical behavior of a stochastic SVIR epidemic model with vaccination. *Physica A*. 483: 94-103.