ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CẦN CẤP HAI CHO NGHIỆM HỮU HIỆU YẾU TRONG BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTƠ CÓ RÀNG BUỘC

Trần Mậu Vĩnh[1*] và Trần Văn Sự[2]

[1]*Trường Trung học cơ sở Chu Văn An, Tam Kỳ, Quảng Nam*

[2]*Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng*

[*]*Tác giả liên hệ: vtranmau@gmail.com*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 20/4/2022; Ngày nhận chỉnh sửa: 10/8/2022; Ngày duyệt đăng: 26/9/2022

Tóm tắt

Trong bài báo chúng tôi đi nghiên cứu điều kiện tối ưu cần cấp hai cho bài toán tối ưu vectơ không trơn có các ràng buộc tập, nón và đẳng thức dựa vào khái niệm đạo hàm theo phương cấp hai liên tục trong không gian Banach thực. Với mục đích trên, chúng tôi cung cấp một số khái niệm cho các nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán và trình bày một số đặc trưng về tính khả vi hai lần theo phương cho lớp hàm giá trị thực. Dưới các giả thiết phù hợp, một số điều kiện tối ưu cần cấp hai cơ bản và đối ngẫu dạng Fritz John cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán được cung cấp. Điều kiện tối ưu cấp hai thu được trong bài báo là mới hoặc cải thiện các kết quả đã biết trong những năm gần đây.

Từ khóa: *Bài toán tối ưu vectơ không trơn, các điều kiện tối ưu cần cấp hai, các nghiệm hữu hiệu yếu, đạo hàm theo phương liên tục hai lần.*

SECOND-ORDER NECESSARY OPTIMALITY CONDITION FOR WEAKLY EFFICIENT SOLUTIONS IN CONSTRAINED VECTOR OPTIMIZATION PROBLEMS

Tran Mau Vinh[1*] and Tran Van Su[2]

[1]*Chu Van An Secondary School, Tam Ky, Quang Nam*

[2]*Department of Mathematics, The University of Danang - University of Science and Education*

[*]*Corresponding author: vtranmau@gmail.com*

Article history

Received: 20/4/2022; Received in revised form: 10/8/2022; Accepted:26/9/2022

Abstract

In the paper we study second-order necessary optimality conditions for a nonsmooth vector optimization problem with set, cone and equality constraints based on the concept of twice continuously directional derivatives in real Banach spaces. For the purpose above, we provide some concepts for weakly efficient solutions to such problem and present some characterizations on twice continuously directional differentiabilities for the class of real-valued functions. Under suitable assumptions, some primal and Fritz John-type dual second-order necessary optimality conditions for the locally weakly efficient solutions of such problem are provided as well. The second-order optimality conditions obtained are new or improve some recent existing ones in the literature.

Keywords: *Nonsmooth vector optimization problems, second-order necessary optimality conditions, weakly efficient solutions, twice continuously directional derivatives.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.12.2.2023.1030

Trích dẫn: Trần Mậu Vĩnh và Trần Văn Sự. (2023). Điều kiện tối ưu cần cấp hai cho nghiệm hữu hiệu yếu trong bài toán tối ưu vectơ có ràng buộc. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 12*(2), 35-43.

1. Mở đầu

Tối ưu hoá vectơ là một lĩnh vực năng động được quan tâm nghiên cứu nhiều trong thời gian gần đây bởi nhiều nhà khoa học trong nước và quốc tế (xem Bonnans *và cs.* (1999); Constantin (2011, 2021); Ginchev và Ivanov (2008); Ivanov (2015); Jiménez và Novo (2003, 2004); Liu (1991); Luu (2018); Rockafellar (1970); Su (2020); Bonnans và Shapiro (2000) và danh mục các tài liệu trích dẫn trong đó). Giữa các khía cạnh khác nhau như sự tồn tại nghiệm, độ nhạy nghiệm, cấu trúc tập nghiệm và thuật toán thì điều kiện tối ưu được nhiều nhà nghiên cứu tiến hành do sự ứng dụng rộng rãi của chủ đề trong khoa học toán học, kinh tế, kỹ thuật... Bonnans *và cs.* (1999) dẫn điều kiện tối ưu cấp hai cho bài toán tối ưu vectơ có ràng buộc theo các tập tiếp xúc cấp hai dạng Parabolic; Constantin (2011) cung cấp điều kiện tối ưu cấp hai cho bài toán tối ưu có ràng buộc theo các phương tiếp xúc với dữ liệu Lipschitz địa phương; Liu (1991) thiết lập điều kiện tối ưu cấp hai cho các nghiệm không trội trong bài toán quy hoạch đa mục tiêu suy rộng với dữ liệu thuộc lớp hàm C1,1. Đặc biệt, đối với một lớp bài toán tối ưu vectơ không có ràng buộc đẳng thức, thậm chí không có ràng buộc tập (chỉ có ràng buộc bất đẳng thức tổng quát hay ràng buộc nón), Ginchev và Ivanov (2008) thu được điều kiện tối ưu cấp hai cho bài toán tối ưu vectơ trừ ràng buộc đẳng thức với dữ liệu thuộc lớp hàm C1; Ivanov (2015) xây dựng điều kiện tối ưu cấp hai cho lớp bài toán tối ưu vectơ với dữ liệu khả vi Fréchet và chuẩn hóa ràng buộc cấp hai; Jiménez và Novo (2003, 2004) hiển thị điều kiện tối ưu cấp hai cho cực tiểu chặt trong lớp bài toán tối ưu không trơn và khả vi dựa trên các tập tiếp xúc cấp hai.

Để nghiên cứu điều kiện tối ưu cần cho các kiểu nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu vectơ, đạo hàm theo phương (hướng) được sử dụng nhiều trong thời gian gần đây, chẳng hạn, Luu (2018) cung cấp điều kiện tối ưu cần và đủ cấp hai cho bài toán tối ưu đa mục tiêu sử dụng công cụ đạo hàm theo hướng cấp hai kiểu Páles-Zeidan kết hợp với các chuẩn hóa ràng buộc cấp hai; Su (2020) thiết lập các điều kiện tối ưu cần và đủ cấp hai cho tính hữu hiệu của lớp bài toán cân bằng vectơ ngoài ràng buộc đẳng thức dựa trên công cụ đạo hàm theo hướng đa trị với một lớp hàm ổn định. Tuy nhiên, kết quả thu được về điều kiện tối ưu cần cấp hai theo công cụ đạo hàm theo phương khả vi hai lần cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán vẫn còn ít. Đây là lý do chính để chúng tôi sử dụng công cụ đạo hàm theo phương này cho công việc nghiên cứu điều kiện tối ưu cần cấp hai đối với bài toán tối ưu vectơ không trơn với đầy đủ các ràng buộc tập, bất đẳng thức tổng quát (nón) và đẳng thức.

Dựa trên sự hiểu biết của chúng tôi đối với lớp hàm khả vi liên tục theo phương hai lần trong trường hợp đơn trị, điều kiện tối ưu cần cấp hai cho tính hữu hiệu của bài toán tối ưu vectơ có đầy đủ các ràng buộc (tập, nón, đẳng thức) vẫn chưa được xem xét cẩn thận trong thời gian gần đây và nhiều kết quả quan trọng của chúng về tính tối ưu cần cấp hai liên quan đến đạo hàm theo phương đã bị bỏ qua. Vì vậy, việc thiết lập điều kiện tối ưu cần cấp hai cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán tối ưu vectơ đầy đủ các ràng buộc là hữu ích trong bài báo này. Chú ý đạo hàm theo phương liên tục hai lần là công cụ tốt để thiết lập điều kiện tối ưu cần cấp hai cho lớp các bài toán tối ưu vectơ không trơn bởi vì công cụ đạo hàm theo phương cấp hai xét về mặt tính toán thì dễ dàng thực hiện, có thể vận dụng linh hoạt và tiện lợi hơn các công cụ dưới vi phân trừu tượng khác, chẳng hạn dưới vi phân Clarke, dưới vi phân Fréchet, dưới vi phân Mordukhovich...

Với các lý do nêu trên, chúng tôi sử dụng công cụ đạo hàm theo phương khả vi hai lần cấp hai để xây dựng các điều kiện tối ưu cần cấp hai cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán tối ưu vectơ có ràng buộc không trơn. Kết quả thu được trong bài báo là công cụ tốt để làm việc với các điều kiện tối ưu cấp hai dạng đối ngẫu và các mô hình đối ngẫu cho lớp bài toán tối ưu vectơ không trơn có đầy đủ ràng buộc trong tương lai và cơ sở để đề xuất thuật toán giải bài toán sau này.

2. Bài toán tối ưu vectơ

2.1. Ký hiệu

Cho một không gian Banach X với không gian đối ngẫu tôpô của nó ký hiệu là X^* và cho một tập con không rỗng tùy ý $A \subset X$. Phần trong, bao đóng, bao lồi và bao nón của tập A được ký hiệu tương ứng bởi intA, $\overline{A}$, coA, cone$A$, ở đây $coneA = \{ta : t \geq 0,\ a \in A\}$. Một dãy các số thực dương (t_n) có giới hạn bằng 0 được ký hiệu bởi $t_n \to 0^+$. Số phần tử của tập A ký hiệu là $|A|$ và nón đối ngẫu của tập A định nghĩa là $A^+ = \{\xi \in X^* \mid \langle \xi, a \rangle \geq 0\ \forall a \in A\}$.

Cho tùy ý các vectơ $v, \mathrm{w}, \bar{x}$ thuộc *X*.

Định nghĩa 2.1.1. Ta nói *v* với liên kết *w* nếu

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{d\left(\bar{x}+tv+\frac{t^2}{2}\mathrm{w}, A\right)}{t^2}=0.$$

Chú ý 1: *w* được gọi là vectơ tiếp xúc cấp hai đối với tập *A* tại vectơ $\bar{x}$.

Định nghĩa 2.1.2. Nón *tiếp xúc* cấp một và cấp hai đối với tập A tại vectơ $\bar{x}\in\bar{A}$ được định nghĩa tương ứng là:

$T\left(A,\bar{x}\right)=\{v\in X \mid \exists\gamma:(0,+\infty)\to X$ sao cho $\lim_{t\to 0^+}\gamma(t)=0$ và $\bar{x}+t\left(v+\gamma(t)\right)\in A, \forall t>0\}$,

$T^2\left(A,\bar{x}\right)=\{\mathrm{w}\in X \mid \exists v\in X, \ \gamma:(0,+\infty)\to X$ sao cho $\lim_{t\to 0^+}\gamma(t)=0$ và $\bar{x}+tv+\frac{1}{2}t^2\left(\mathrm{w}+\gamma(t)\right)\in A, \forall t>0\}$.

Chú ý 2: Dễ dàng thấy rằng các nón tiếp xúc cấp một và cấp hai đều chứa gốc tọa độ O. Chú ý $T\left(A,\bar{x}\right)$ là một nón đóng trong *X* và $T^2\left(A,\bar{x}\right)$ là một nón trong X (xem Constantin (2021)). Trong trường hợp vectơ *v liên kết* w ta luôn có các quan hệ $v\in T\left(A,\bar{x}\right)$ và $w\in T^2\left(A,\bar{x}\right)$.

2.2. Định nghĩa

Cho *X, Y, Z, W* là các không gian Banach thực với một chuẩn $\|.\|$ (ở đây không có sự nhầm lẫn xảy ra), không gian đối ngẫu tôpô của *X, Y, Z, W* tương ứng là *X*, Y*, Z*, W**. Cho một tập con tùy ý *C* khác rỗng của *X*, một nón lồi đóng có phần trong khác rỗng *Q* trong *Y* và một nón lồi đóng *S* có phần trong khác rỗng trong *Z*. Xét các ánh xạ giá trị vectơ sau:

$$f: X\to Y,\ g: X\to Z,\ h: X\to \mathrm{W}.$$

Bài toán tối ưu vectơ không trơn có các ràng buộc tập, nón và đẳng thức *(PC)* được định nghĩa là:

$$\begin{cases} \min\limits_{x\in X} f(x) \\ sao\,cho \begin{cases} g(x)\in -S \\ h(x)=0 \\ x\in C \end{cases} \end{cases}$$

Ký hiệu *K* tập chấp nhận được của bài toán *(PC)*, nghĩa là

$$K=\left\{x\in C: g\left(x\right)\in -S,\ h\left(x\right)=0\right\}.$$

Định nghĩa 2.2.1.

(i) Mỗi vectơ $\bar{x}\in K$ được gọi là chấp nhận được của bài toán *(PC).*

(ii) Mỗi vectơ $\bar{x}\in K$ được gọi là một nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán *(PC)* nếu với mọi $x\in K$ ta có

$$f\left(x\right)-f\left(\bar{x}\right)\notin -\operatorname{int}Q.$$

(iii) Mỗi vectơ $\bar{x}\in K$ được gọi là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của *(PC)* nếu tồn tại hình cầu mở tâm $\bar{x}$ bán kính $\delta>0\left(B\left(\bar{x},\delta\right)\right)$ sao cho với $x\in K\cap B\left(\bar{x},\delta\right)$, ta có

$$f\left(x\right)-f\left(\bar{x}\right)\notin -\operatorname{int}Q$$

Chú ý 3: Nếu vectơ $\bar{x}\in K$ là một nghiệm hữu hiệu yếu của *(PC)*, thì $\bar{x}$ cũng là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của *(PC)*. Đặc biệt, trong trường hợp $Q=[0,+\infty)$, mối quan hệ $f\left(x\right)-f\left(\bar{x}\right)\notin -\operatorname{int}Q$ tương đương với bất đẳng thức $f\left(x\right)\geq f\left(\bar{x}\right)$.

Ký hiệu: $H=\left\{x\in X: h(x)=0\right\}$.

Theo định nghĩa 2.1.2., ta luôn có

$$T^2\left(H,\bar{x}\right)\bigcap T^2\left(C,\bar{x}\right)\supset T^2\left(H\cap C,\bar{x}\right). \quad (*)$$

Tuy nhiên, do C là tập tùy ý trong *X* nên bao hàm thức ngược lại không đúng trong trường hợp tổng quát. Trường hợp C mở và $C\cap H$ mở, hiển nhiên

$$T^2\left(C,\bar{x}\right)=T^2\left(C\cap H,\bar{x}\right)=X.$$

Do đó, bao hàm thức ngược lại của (*) luôn được thỏa mãn. Trong bài toán tối ưu *(PC)*, không phải lúc nào tập *C* và $C\cap H$ cũng mở, nên để thuận tiện trong công việc nghiên cứu, chúng tôi đề xuất chuẩn hóa ràng buộc cấp hai (CQ) sau:

Định nghĩa 2.2.2. Ta nói điều kiện chuẩn hóa ràng buộc cấp hai (CQ) cho bài toán *(PC)* được thỏa mãn tại vectơ $\bar{x}\in C\cap H$ nếu

$$T^2\left(H, \bar{x}\right) \bigcap T^2\left(C, \bar{x}\right) \subset T^2\left(H \cap C, \bar{x}\right).$$

Với chuẩn hóa ràng buộc cấp hai (CQ), ta có đẳng thức đúng:

$$T^2\left(H, \bar{x}\right) \bigcap T^2\left(C, \bar{x}\right) = T^2\left(H \cap C, \bar{x}\right).$$

Định nghĩa cơ bản về đạo hàm theo phương được trích từ tài liệu Rockarfellar (1970):

Định nghĩa 2.2.3. Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và $\bar{x}, v \in X$. Khi đó:

(i) Đạo hàm theo phương cấp một của f tại $\bar{x}$ theo phương v được xác định bởi

$$Df\left(\bar{x}\right)(v) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f\left(\bar{x} + tv\right) - f\left(\bar{x}\right)}{t}.$$

Nếu giới hạn trên tồn tại theo mọi phương v thì f gọi là khả vi theo phương tại $\bar{x}$.

(ii) Đạo hàm theo phương cấp hai của f tại vectơ $\bar{x}$ theo phương v được xác định bởi

$$D^2 f\left(\bar{x}\right)(v) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f\left(\bar{x} + tv\right) - f\left(\bar{x}\right) - tDf\left(\bar{x}\right)(v)}{\frac{t^2}{2}}.$$

Nếu giới hạn trên tồn tại theo mọi phương v thì f gọi là khả vi hai lần theo phương tại $\bar{x}$.

(iii) Ta nói rằng f khả vi theo phương liên tục hai lần tại $\bar{x}$ nếu các đạo hàm cấp một và cấp hai $Df(.)$, $D^2 f(.)$ liên tục tại $\bar{x}$.

Chú ý 4: Theo Rockafellar (1970) ta được

$$Df\left(\bar{x}\right)(su) = sDf\left(\bar{x}\right)(u), \ \forall s \geq 0.$$

và nếu thêm giả thiết đạo hàm *Df*(.) liên tục tại vectơ $\bar{x}$ thì với tùy ý $\bar{x}, u, v$ thuộc *X:*

$$Df\left(\bar{x}\right)(u+v) = Df\left(\bar{x}\right)(u) + Df\left(\bar{x}\right)(v).$$

3. Đặc trưng cấp hai

Vận dụng kết quả trong *Chú ý 4* ta nhận được một số đặc trưng cấp hai liên quan đến đạo hàm theo phương như sau:

Mệnh đề 3.1. Cho ánh xạ khả vi liên tục hai lần theo phương $f : X \to Y$ tại vectơ $\bar{x} \in X$ và cho các vectơ $u, v \in X$. Khi đó:

(i) $D^2 f\left(\bar{x}\right)(su) = s^2 D^2 f\left(\bar{x}\right)(u), \ \forall s \geq 0.$

(ii) $D^2 f\left(\bar{x}\right)(u+v) = D^2 f\left(\bar{x}\right)(u) + D^2 f\left(\bar{x}\right)(v).$

(iii) $$f\left(\bar{x} + tu + \frac{t^2}{2}v\right) = f\left(\bar{x}\right) + tDf\left(\bar{x}\right)(u) + \frac{t^2}{2}\left(Df\left(\bar{x}\right)(v) + D^2 f\left(\bar{x}\right)(u)\right) + o\left(t^2\right) \forall t \geq 0,$$

ở đây $\lim_{t \to 0^+} \frac{o(t^2)}{t^2} = 0.$

Chứng minh:

Theo định nghĩa đạo hàm theo hướng với mọi số thực $s > 0$, ta có

$$\begin{aligned} D^2 f\left(\bar{x}\right)(su) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f\left(\bar{x} + tsu\right) - f\left(\bar{x}\right) - tDf\left(\bar{x}\right)(su)}{\frac{t^2}{2}} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f\left(\bar{x} + (ts)u\right) - f\left(\bar{x}\right) - (ts)Df\left(\bar{x}\right)(u)}{\frac{(st)^2}{2s^2}} \\ &= s^2 D^2 f\left(\bar{x}\right)(u). \end{aligned}$$

Hiển nhiên (i) đúng trong trường hợp $s = 0$ và do đó (i) đúng với mọi $s \geq 0$.

(ii) Tương tự như chứng minh trong trường hợp (i) ta có:

$$\begin{aligned} & D^2 f\left(\bar{x}\right)(u+v) \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f\left(\bar{x} + t(u+v)\right) - f\left(\bar{x}\right) - tDf\left(\bar{x}\right)(u+v)}{\frac{t^2}{2}} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f\left(\bar{x} + tu + tv\right) - f\left(\bar{x}\right) - t\left(Df\left(\bar{x}\right)(u) + Df\left(\bar{x}\right)(v)\right)}{\frac{t^2}{2}} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{f\left(\bar{x} + tu + tv\right) - f\left(\bar{x} + tu\right) - tDf\left(\bar{x}\right)(v)}{\frac{t^2}{2}} \right. \\ & \left. + \frac{f\left(\bar{x} + tu\right) - f\left(\bar{x}\right) - tDf\left(\bar{x}\right)(u)}{\frac{t^2}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} D^2 f\left(\bar{x}+tu\right)\left(v\right) + D^2 f\left(\bar{x}\right)\left(u\right)$$

$$= D^2 f\left(\bar{x}\right)\left(u\right) + D^2 f\left(\bar{x}\right)\left(v\right).$$

(iii) Sử dụng tính khả vi liên tục hai lần của ánh xạ f tại $\bar{x} \in X$ và sau đó kết hợp (i), (ii) và $\lim_{t\to 0^+} \frac{o(t^2)}{t^2} = 0,$ ta có khai triển Taylor đến cấp hai:

$$f\left(\bar{x}+tu+\frac{t^2}{2}v\right) = f\left(\bar{x}\right) + \frac{Df\left(\bar{x}\right)\left(tu+\frac{t^2 v}{2}\right)}{1} + \frac{Df\left(\bar{x}\right)(tu)}{2} + o(t^2)$$

$$= f\left(\bar{x}\right) + tDf\left(\bar{x}\right)\left(u\right) + \frac{t^2}{2}\left(Df\left(\bar{x}\right)\left(v\right) + D^2 f\left(\bar{x}\right)\left(u\right)\right) + o\left(t^2\right).$$

Điều phải chứng minh. □

Chú ý 5: Công thức (iii) được gọi là khai triển Taylor đến cấp hai của hàm số khả vi liên tục theo phương f tại $\bar{x} \in X$ và biểu thức $o\left(t^2\right)$ được gọi là vô cùng bé bậc cao hơn so với t^2 trong quá trình $t \to 0^+$.

Trường hợp f khả vi liên tục Fréchet hai lần tại $\bar{x} \in X$, ta có từ công thức (iii):

$$f\left(\bar{x}+tu+\frac{t^2}{2}v\right) = f\left(\bar{x}\right) + t\nabla f\left(\bar{x}\right)\left(u\right) + \frac{t^2}{2}\left(\nabla f\left(\bar{x}\right)\left(v\right) + \nabla^2 f\left(\bar{x}\right)\left(u\right)\right) + o\left(t^2\right) \forall t \geq 0,$$

ở đây $\lim_{t\to 0^+} \frac{o(t^2)}{t^2} = 0,$ các đạo hàm Fréchet cấp một và cấp hai của hàm f tại điểm $\bar{x} \in X$ được ký hiệu tương ứng bởi $\nabla f\left(\bar{x}\right)$ và $\nabla^2 f\left(\bar{x}\right)$.

Để nghiên cứu điều kiện tối ưu cần cấp hai cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (PC), chúng ta gọi lại mệnh đề sau (xem Constantin (2011)):

Mệnh đề 3.2. Giả sử rằng:

(a) $\bar{x} \in H := \{x \in X : h(x) = 0\}$.

(b) h là hàm khả vi Fréchet liên tục đến cấp hai trong một lân cận của điểm $\bar{x}$.

(c) $\nabla h\left(\bar{x}\right) : X \to W$ là toàn ánh tuyến tính.

Khi đó, $v \in T^2\left(H, \bar{x}\right)$ với vectơ liên kết $u \in T\left(H, \bar{x}\right)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \nabla h\left(\bar{x}\right)\left(u\right) = 0 \\ \nabla h\left(\bar{x}\right)\left(v\right) + \nabla^2 h\left(\bar{x}\right)\left(u,u\right) = 0 \end{cases}$$

Mệnh đề 3.3. (Su (2020)) Cho dãy số thực dương $\left(t_n\right)$ với $t_n \to 0^+$ và giả sử $z \in -S$.

Nếu tồn tại $\lim_{n\to+\infty} \frac{z_n - z}{t_n^2} \in -\operatorname{int} cone\left(S+z\right)$, thì dãy $\left(z_n\right) \subset -S$ với mọi số nguyên dương n đủ lớn.

4. Điều kiện tối ưu cần cấp hai cho nghiệm hữu hiệu yếu

Xét bài toán tối ưu vectơ không trơn có ràng buộc *(PC)* được xác định như trong tiểu mục 2.2. Cho ngắn gọn, từ đây ta quy ước bất kỳ $v \in T^2\left(H, \bar{x}\right)$ có vectơ liên kết $u \in T\left(H, \bar{x}\right)$ nếu không có phát biểu khác. Đặt

$$\hat{S} = cone\left(S + g\left(\bar{x}\right)\right),$$

$$K(H) = \left\{u \in X : \nabla h(\bar{x})(u) = 0\right\}.$$

Khi đó, ta có $\hat{S} + \operatorname{int}\hat{S} = \operatorname{int}\hat{S}$ do $\hat{S}$ là một nón lồi đóng với $\operatorname{int}\hat{S}$ khác rỗng. Cho trước $v \in T^2\left(H, \bar{x}\right)$, ta ký hiệu

$$K^2\left(C,\bar{x}\right) = \left\{\begin{array}{l} v \in X : Df\left(\bar{x}\right)\left(u\right) = 0,\ \ Dg\left(\bar{x}\right)\left(u\right) \in -S, \\ Dg\left(\bar{x}\right)\left(v\right) + D^2 g\left(\bar{x}\right)\left(u\right) + \dfrac{o\left(t^2\right)}{\frac{1}{2}t^2} \in -\operatorname{int} S \ \ \forall t > 0 \end{array}\right\}$$
$$\cap \left\{v \in X : \nabla h\left(\bar{x}\right)\left(v\right) + \nabla^2 h\left(\bar{x}\right)\left(u,u\right) = 0\right\} \cap T^2\left(C,\bar{x}\right),$$

$$\overline{K}^2\left(C,\bar{x}\right) = \left\{v \in X : Df\left(\bar{x}\right)\left(u\right) = 0,\ Dg\left(\bar{x}\right)\left(u\right) \in -S\right\}$$
$$\cap \left\{v \in X : \nabla h\left(\bar{x}\right)\left(v\right) + \nabla^2 h\left(\bar{x}\right)\left(u,u\right) = 0\right\} \cap T^2\left(C,\bar{x}\right).$$

Hiển nhiên $K^2\left(C,\bar{x}\right) \subset \overline{K}^2\left(C,\bar{x}\right)$. Do đó, nếu $K^2\left(C,\bar{x}\right)$ khác rỗng thì $\overline{K}^2\left(C,\bar{x}\right)$ cũng khác rỗng.

Tiếp theo chúng tôi đưa ra điều kiện để $K^2\left(C,\bar{x}\right)$ khác rỗng. Đặt

$$K_1=\left\{x\in C: g\left(x\right)\in -\operatorname{int}\hat{S},\ h\left(x\right)=0\right\}.$$

Mệnh đề 4.1. Cho $\bar{x}\in K_1$ và bất kỳ $v\in T^2\left(K_1,\bar{x}\right)$ có vectơ liên kết $u\in T\left(K_1,\bar{x}\right)\cap\ker Df(\bar{x})(.)\cap\ker Dg(\bar{x})(.)$. Nếu *f, g* khả vi liên tục hai lần theo phương tại $\bar{x}$; h là hàm khả vi Fréchet liên tục đến cấp hai trong một lân cận của điểm $\bar{x}$ với $\nabla h\left(\bar{x}\right): X\to W$ là toàn ánh tuyến tính, thì $K^2\left(C,\bar{x}\right)\neq\phi$ và $\bar{K}^2\left(C,\bar{x}\right)\neq\phi.$

Chứng minh:

Vì $\bar{x}\in K_1$ nên $T\left(K_1,\bar{x}\right)\neq\phi$ và theo giả thiết ban đầu ta luôn tìm được vectơ $u\in T\left(K_1,\bar{x}\right)\cap\ker Df(\bar{x})(.)\cap\ker Dg(\bar{x})(.)$ sao cho $v\in T^2\left(K_1,\bar{x}\right)$. Bởi vì $K_1\subset H\cap C$ nên $T^2\left(K_1,\bar{x}\right)\subset T^2\left(H\cap C,\bar{x}\right)\subset T^2\left(C,\bar{x}\right)\cap T^2\left(H,\bar{x}\right).$ Do đó $v\in T^2\left(C,\bar{x}\right)$ có vectơ liên kết $u\in T\left(H,\bar{x}\right)$, áp dụng Mệnh đề 3.2 trên ta suy ra rằng $\nabla h\left(\bar{x}\right)\left(v\right)+\nabla^2 h\left(\bar{x}\right)\left(u,u\right)=0,$ hay

$$v\in T^2\left(C,\bar{x}\right)\bigcap\left\{v\in X:\nabla h\left(\bar{x}\right)\left(v\right)+\nabla^2 h\left(\bar{x}\right)\left(u,u\right)=0\right\}.$$

Ta có nón lồi đóng S chứa 0 và $u\in\ker Df(\bar{x})(.)\cap\ker Dg(\bar{x})(.)$ nên theo định nghĩa nhân của ánh xạ ta được $Df\left(\bar{x}\right)\left(u\right)=0,\ Dg\left(\bar{x}\right)\left(u\right)\in -S.$ Ta chứng minh $v\in K^2\left(C,\bar{x}\right),$ hay tương đương với $Dg\left(\bar{x}\right)\left(v\right)+D^2 g\left(\bar{x}\right)\left(u\right)+\dfrac{o\left(t^2\right)}{\frac{t^2}{2}}\in -\operatorname{int}S$ với mọi $t>0$. Vì $v\in T^2\left(K_1,\bar{x}\right)$ nên ta tìm được một ánh xạ $\gamma:\left(0,+\infty\right)\to X$ thoả mãn $\lim_{t\to 0^+}\gamma\left(t\right)=0$ và không mất tính tổng quát với mọi $t>0$ đủ nhỏ ta giả sử rằng

$$\bar{x}+tu+\frac{t^2}{2}\left(\gamma\left(t\right)+v\right)\in K_1.$$

Do $u\in\ker Dg\left(\bar{x}\right)(.)$ suy ra $Dg\left(\bar{x}\right)\left(u\right)=0,$ $0\in S$ kéo theo $g\left(\bar{x}\right)\in cone\left(S+g\left(\bar{x}\right)\right)=\hat{S}.$ Sử dụng Mệnh đề 3.1 trên, với mọi $t>0$:

$$\begin{aligned}
&Dg(\bar{x})(v)+D^2g(\bar{x})(u)+\frac{o(t^2)}{\frac{t^2}{2}}\\
&=\frac{g\left(\bar{x}+tu+\frac{t^2}{2}(\gamma(t)+v)\right)-g(\bar{x})-tDg(\bar{x})(u)}{\frac{t^2}{2}}\\
&=\frac{g\left(\bar{x}+tu+\frac{t^2}{2}(\gamma(t)+v)\right)-g(\bar{x})}{\frac{t^2}{2}}\\
&\in -int\,\hat{S}-g(\bar{x})\\
&\subset -int\,\hat{S}-\hat{S}\\
&=-int\,\hat{S}.
\end{aligned}$$

Vậy $v\in K^2\left(C,\bar{x}\right)$ suy ra $v\in\bar{K}^2\left(C,\bar{x}\right)$ và chúng ta kết thúc chứng minh mệnh đề. □

Bây giờ chúng tôi cung cấp điều kiện tối ưu cần cấp 2 cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán *(PC)*:

Định lý 4.1. Giả sử các giả thiết (a), (b) và (c) trong *Mệnh đề 3.2* được thỏa mãn và chuẩn hóa ràng buộc cấp hai (CQ) cho bài toán *(PC)* đúng tại $\bar{x}\in K.$ Giả sử các ánh xạ *f, g* khả vi liên tục hai lần theo phương tại $\bar{x}.$ Nếu vectơ $\bar{x}\in K$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán *(PC)* thì với mọi phương chấp nhận được $v\in K^2\left(C,\bar{x}\right)$ với liên kết $u\in K\left(H\right)$ ta có

$$Df\left(\bar{x}\right)\left(v\right)+D^2 f\left(\bar{x}\right)\left(u\right)\notin -\operatorname{int}Q. \qquad (1)$$

Chứng minh:

Ta có $u\in K\left(H\right)$ kéo theo $\nabla h\left(\bar{x}\right)\left(u\right)=0$ và $v\in K^2\left(C,\bar{x}\right)$ suy ra $\nabla h\left(\bar{x}\right)\left(v\right)+\nabla^2 h\left(\bar{x}\right)\left(u,u\right)=0.$ Áp dụng *Mệnh đề 3.2* ta được vectơ $v\in T^2\left(H,\bar{x}\right)$ vì vectơ $u\in T\left(H,\bar{x}\right)$ dựa theo Jiménez và Novo, 2003. Theo giả thiết ban đầu $v\in K^2\left(C,\bar{x}\right)$ chúng ta suy ra rằng $v\in T^2\left(C,\bar{x}\right)\cap T^2\left(H,\bar{x}\right).$ Áp dụng chuẩn hóa ràng buộc cấp hai (CQ) cho bài toán

(PC) thỏa mãn tại $\bar{x} \in K$ ta được $v \in T^2\left(C \cap H, \bar{x}\right)$. Ta có vectơ chấp nhận được $\bar{x}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán *(PC)*, khi đó tồn tại một hình cầu mở $U := B\left(\bar{x}, \delta\right)$ thoả mãn

$$f(x) - f\left(\bar{x}\right) \notin -\operatorname{int} Q \ \ (\forall x \in K \cap U). \qquad (2)$$

Từ quan hệ $v \in T^2\left(C \cap H, \bar{x}\right)$ suy ra tồn tại một ánh xạ $\gamma : (0, +\infty) \to X$ thoả mãn $\lim_{t \to 0^+} \gamma(t) = 0$ và không mất tính tổng quát với mọi $t > 0$ đủ nhỏ ta giả sử rằng

$$\bar{x} + tu + \frac{t^2}{2}\left(\gamma(t) + v\right) \in C \cap H \cap U. \qquad (3)$$

Vì ánh xạ g khả vi liên tục hai lần theo phương tại $\bar{x}$, lại áp dụng *Mệnh đề 2.2 (iii),* với tùy ý $t \geq 0$ ta có

$$g\left(\bar{x} + tu + \frac{t^2}{2}v\right) = g\left(\bar{x}\right) + tDg\left(\bar{x}\right)(u)$$

$$+ \frac{t^2}{2}\left(Df\left(\bar{x}\right)(v) + D^2 g\left(\bar{x}\right)(u)\right) + o\left(t^2\right),$$

ở đây $o\left(t^2\right)/t^2 \to 0$ khi $t \to 0^+$.

Từ các quan hệ

$$Dg\left(\bar{x}\right)(v) + D^2 g\left(\bar{x}\right)(u) \in -\operatorname{int}\hat{S},$$

$$\frac{Dg\left(\bar{x}\right)(u)}{t} \in -S, \ g\left(\bar{x}\right) \in -S \text{ ta được:}$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{g\left(\bar{x} + tu + \frac{t^2}{2}v\right) - g\left(\bar{x}\right)}{t^2} \in -\operatorname{int}\hat{S}$$

do giới hạn bên trái bằng với

$$\frac{1}{2}\left(Dg\left(\bar{x}\right)(v) + D^2 g\left(\bar{x}\right)(u)\right)$$

$$+ \frac{Dg\left(\bar{x}\right)(u)}{t} \in -\operatorname{int}\hat{S}.$$

Vậy $g\left(\bar{x} + tu + \frac{t^2}{2}v\right) \in -S$ (4) với bất kỳ số dương $t > 0$ đủ bé.

Kết hợp (2), (3), (4) và sử dụng khai triển Taylor đến cấp hai của hàm f tại $\bar{x}$ ta được

$$Df\left(\bar{x}\right)(v) + D^2 f\left(\bar{x}\right)(u) = -\frac{2}{t}Df\left(\bar{x}\right)(u)$$

$$+ \lim_{t \to 0^+} \frac{f\left(\bar{x} + tu + \frac{t^2}{2}v\right) - f\left(\bar{x}\right)}{\frac{t^2}{2}}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{f\left(\bar{x} + tu + \frac{t^2}{2}v\right) - f\left(\bar{x}\right)}{\frac{t^2}{2}}$$

$$\in Y \setminus \left(-\operatorname{int} Q\right).$$

Vậy quan hệ (1) đúng và kết thúc chứng minh định lý. □

Định lý 4.2. Giả sử các giả thiết (a), (b) và (c) trong *Mệnh đề 3.2* được thỏa mãn và chuẩn hóa ràng buộc cấp hai (CQ) cho bài toán *(PC)* đúng tại $\bar{x} \in K$. Giả sử các ánh xạ *f, g* khả vi liên tục hai lần theo phương tại $\bar{x}$. Nếu vectơ $\bar{x} \in K$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán *(PC)* thì với mọi hướng chấp nhận được $v \in \overline{K}^2\left(C, \bar{x}\right)$ với liên kết $u \in K(H)$, ta có

$$\left(Df\left(\bar{x}\right)(v) + D^2 f\left(\bar{x}\right)(u), Dg\left(\bar{x}\right)(v) + D^2 g\left(\bar{x}\right)(u)\right)$$

$$\notin (-\,int\,Q) \times \left(-\,int\,\hat{S}\right), \qquad (5)$$

ở đây $\hat{S} := cone\left(S + g\left(\bar{x}\right)\right)$.

Chứng minh: Nếu xảy ra trường hợp $Dg\left(\bar{x}\right)(v) + D^2 g\left(\bar{x}\right)(u) \notin -\operatorname{int}\hat{S}$, thì quan hệ (5) hiển nhiên được thoả mãn. Ngược lại, theo cách xây dựng của tập $\overline{K}^2\left(C, \bar{x}\right)$ và suy ra từ giả thiết $v \in \overline{K}^2\left(C, \bar{x}\right)$ rằng $v \in K^2\left(C, \bar{x}\right)$. Áp dụng *Định lý 4.1*, ta có quan hệ (1) đúng và điều này kéo theo quan hệ không phụ thuộc (5) cũng đúng và điều này kết thúc chứng minh định lý. □

Cuối cùng, chúng tôi cung cấp điều kiện tối ưu cần cấp hai kiểu Fritz John sau:

Định lý 4.3. Giả sử các giả thiết (a), (b) và (c) trong *Mệnh đề 3.2* được thỏa mãn và chuẩn hóa ràng buộc cấp hai (CQ) cho bài toán *(PC)* đúng tại $\bar{x} \in K$. Giả sử các ánh xạ *f, g* khả vi liên tục hai lần theo phương tại $\bar{x}$. Nếu vectơ $\bar{x} \in K$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán *(PC)* thì với mọi hướng chấp nhận được $v \in \overline{K}^2(C, \bar{x})$ với liên kết $u \in K(H)$, tồn tại các cặp $\lambda_1, \lambda_2 \in Q^+$ và $\mu_1, \mu_2 \in S^+$, chúng không đồng thời bằng 0 thoả mãn

$$\begin{cases} \lambda_1 Df(\bar{x})(v) + \lambda_2 D^2 f(\bar{x})(u) \\ \quad + \mu_1 Dg(\bar{x})(v) + \mu_2 D^2 g(\bar{x})(u) \geq 0 & (6) \\ \mu_1 g(\bar{x}) = 0, \qquad \mu_2 g(\bar{x}) = 0 & (7) \end{cases}$$

Chứng minh:

Áp dụng *Định lý 4.2* ta có quan hệ (5) đúng. Sử dụng một định lý tách mạnh (Rockarfellar (1970)) cho hai tập hợp rời nhau gồm tập compact và tập tích có phần trong khác rỗng, khi đó tồn tại $(\lambda, \mu) \in (Q^+ \times S^+) \setminus \{0,0\}$ với $\mu g(\bar{x}) = 0$ thỏa mãn

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \left(Df(\bar{x})(v) + D^2 f(\bar{x})(u) \; Dg(\bar{x})(v) + D^2 g(\bar{x})(u) \right) \geq 0$$

tương đương

$$\lambda\left(Df(\bar{x})(v) + D^2 f(\bar{x})(u) \right) + \mu\left(Dg(\bar{x})(v) + D^2 g(\bar{x})(u) \right) \geq 0.$$

Chọn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,\ \mu_1 = \mu_2 = \mu$ ta đi đến kết quả (6) và (7) và điều này kết thúc chứng minh định lý. □

Để khép lại bài báo, chúng tôi đề xuất một ví dụ minh hoạ cho *Định lý 4.3:*

Ví dụ 1: Xét bài toán tối ưu vectơ *(PC)* có đầy đủ các ràng buộc tập, nón, đẳng thức với $X = Z = W = R$, $Y = R^2$, $Q = R_+^2$, $S = R_+$, $C = [-1, 1]$ và $\bar{x} = 0$.

Định nghĩa hàm mục tiêu $f : R \to R^2$ cho bởi $f = (f_1, f_2)$, trong đó:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x}, & (x \neq 0) \\ 0 & , \ (x = 0) \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\sin x}{x} \right)^2, & (x \neq 0) \\ 0 & , \ (x = 0) \end{cases}$$

và các hàm ràng buộc

$g : R \to R$ cho bởi $g(x) = x - x^2 \ (\forall x \in R)$,

$h : R \to R$ cho bởi $h(x) = x^2 - x \ (\forall x \in R)$.

Ta có tập chấp nhận được có dạng

$$\begin{aligned} K &= \{x \in C : g(x) \in -S, h(x) = 0\} \\ &= \{x \in [-1,1] : x^2 - x = 0\} \\ &= \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Chọn $B(\bar{x}, \delta) = B\left(0, \frac{1}{2}\right)$, suy ra

$$K \cap B\left(0, \frac{1}{2}\right) = \{0\}.$$

Ta có với mọi $x \in K \cap B\left(0, \frac{1}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} f(x) - f(\bar{x}) &= f(x) - f(0) \\ &= (0,0) \notin -\operatorname{int} R_+^2 \end{aligned}$$

Theo *Định nghĩa 2.2.1,* $\bar{x} = 0$ là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán *(PC)* và thêm nữa, $\forall u, v \in R$, ta có f, g khả vi hai lần theo phương tại $\bar{x}$ và *h* khả vi hai lần Fréchet tại $\bar{x}$. Do $\nabla h(\bar{x}) : R \to R$ là toàn ánh và hơn nữa

$$\begin{aligned} & Df_1(0)(v) = Df_2(0)(v) = 0, \\ & Dg(0)(v) = v,\ \nabla h(0)(v) = -v, \\ & D^2 f_1(0)(u) = -D^2 f_2(0)(u) = \frac{2}{3}u^2, \\ & D^2 g(0)(u) = -2u^2,\ \nabla^2 h(0)(u) = 2u^2. \end{aligned}$$

Theo *Định lý 3.3* $\forall v \in \overline{K}^2(C, \bar{x})$ với vectơ liên kết $u \in K(H)$ tồn tại các số thực $\lambda_1, \lambda_2 \in R_+^2$, $\mu_1, \mu_2 \in R_+$, tất cả chúng không đồng thời bằng không thỏa mãn

$$\begin{cases} \lambda_1 Df(\bar{x})(v) + \lambda_2 D^2 f(\bar{x})(u) \\ \quad + \mu_1 Dg(\bar{x})(v) + \mu_2 D^2 g(\bar{x})(u) \geq 0 & (8) \\ \mu_1 g(\bar{x}) = \mu_2 g(\bar{x}) = 0 & (9) \end{cases}$$

Thật vậy ta chọn $\lambda_1 = (1,1)$, $\lambda_2 = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \frac{1}{4}$ và được kết quả

$$\begin{cases} \lambda_1 Df\left(\bar{x}\right)(v) + \lambda_2 D^2 f\left(\bar{x}\right)(u) \\ \qquad + \mu_1 Dg\left(\bar{x}\right)(v) + \mu_2 D^2 g\left(\bar{x}\right)(u) \\ = (1.0 + 1.0) + \left(\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}u^2\right) + 2.\frac{2}{3}u^2\right) \\ \qquad + \left(0.v + \frac{1}{4}\left(-2u^2\right)\right) = \frac{1}{2}u^2 \geq 0, \\ \mu_1 g\left(\bar{x}\right) = 0.0 = 0, \qquad \mu_2 g\left(\bar{x}\right) = \frac{1}{4}.0 = 0. \end{cases}$$

Vậy bất đẳng thức và đẳng thức (8) và (9) cùng thỏa mãn. Điều phải kiểm tra.

5. Kết luận

Trong bài báo, chúng tôi đã thiết lập được các điều kiện tối ưu cần cấp hai dạng cơ bản và dạng đối ngẫu kiểu Fritz John cho các nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán tối ưu vectơ không trơn có đầy đủ các ràng buộc *(PC)* dựa trên công cụ của đạo hàm theo phương cấp một và cấp hai với lớp hàm khả vi liên tục hai lần theo phương tại nghiệm chấp nhận được. Kết quả nhận được trên vẫn còn đúng đối với nghiệm hữu hiệu yếu cho bài toán *(PC)*. Bên cạnh, một số đặc trưng cấp hai cho lớp hàm liên quan cũng được thiết lập phù hợp với mục đích ứng dụng của công thức khai triển Taylor đến cấp hai nhằm mục đích phục vụ cho quá trình chứng minh các kết quả của bài báo. Một ví dụ cũng được cung cấp để mô tả định lý đối ngẫu dạng Fritz John.

Lời cảm ơn: Tác giả chân thành cảm ơn đến phản biện đã đọc bản thảo cẩn thận và đưa ra các nhận xét cùng với một số đề xuất phù hợp giúp tác giả điều chỉnh bản thảo tốt hơn.

Tài liệu tham khảo

Bonnans, J.F., Cominetti, R., and Shapiro, A. (1999). Second order optimality conditions based on parabolic second order tangent sets. *SIAM J. Optim., 9*(2), 466-492.

Bonnans, J.F., and Shapiro, A. (2000). *Perturbation analysis of optimization problems*, Springer-Verlag, New York, 1st ed.

Constantin, E. (2011). Second-order optimality conditions for problems with locally Lipschitz data via tangential directions. *Comm. Appl. Nonlinear Anal., 18*(2), 75-84.

Constantin, E. (2021). Necessary conditions for weak minima and for strict minima of order two in nonsmooth constrained multiobjective optimization. J. Glob. Optim., 80, 177-193.

Ginchev, I., and Ivanov, V.I. (2008). Second-order optimality conditions for problems with C1 data. *J. Math. Anal. Appl., 340,* 646-657.

Ivanov, V.I. (2015). Second-order optimality conditions for vector problems with continuously Fréchet differentiable data and second-order constraint qualifications. *J. Optim. Theory Appl., 166,* 777-790.

Jiménez, B., and Novo, V. (2003). First- and second-order sufficient conditions for strict minimality in nonsmooth vector optimization. *J. Math. Anal. Appl., 284,* 496-510.

Jiménez, B., and Novo, V. (2004). Optimality conditions in differentiable vector optimization via second-order tangent sets. *Appl. Math. Optim., 49,* 123-144.

Liu, L.P. (1991). The second-order conditions of nondominated solutions for C1,1 generalized multiobjective mathematical programming. *J. Syst. Sci. Math. Sci., 4,* 128-131.

Luu, D.V. (2018). Second-order necessary efficiency conditions for nonsmooth vector equilibrium problems. *J. Glob. Optim., 70,* 437-453.

Rockafellar, R.T. (1970). *Convex Analysis.* Princeton University Press: Princeton.

Su, T.V. (2020). New second-order optimality conditions for vector equilibrium problems with constraints in terms of contingent derivatives. *Bull. Braz. Math. Soc. New Series., 51*(2), 371-395.