ĐIỀU KIỆN CO CIRIC SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIAN *b*-METRIC

Nguyễn Văn Dũng[1*] và Nguyễn Thị Trúc Linh[2]

[1]Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp

[2]Sinh viên, Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp

[*]Tác giả liên hệ: nvdung@dthu.edu.vn

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 04/4/2021; Ngày nhận chỉnh sửa:02/6/2021; Ngày duyệt đăng: 18/6/2021

Tóm tắt

Trong bài viết này, chúng tôi mở rộng kiểu co Ciric trong không gian b-metric (Lu, He và Du, 2019) bằng cách thêm vào 4 số hạng $\rho(T^2x,x)$, $\rho(T^2x,Tx)$, $\rho(T^2x,y)$, $\rho(T^2x,Ty)$, *để trở thành*

$$\rho(Tx,Ty) \le \lambda\, max\{\rho(x,y), \rho(x,Tx), \rho(y,Ty), \rho(x,Ty), \rho(Tx,y),$$
$$\rho(T^2x,x), \rho(T^2x,Tx), \rho(T^2x,y), \rho(T^2x,Ty)\}$$

trong đó W *là không gian b-metric,* $T: W \to W$ *và* $x, y \in W$.

Từ khóa: *Điểm cố định, không gian b-metric, kiểu co Ciric suy rộng, tính chất Fatou.*

THE GENERALIZED CIRIC CONTRACTION CONDITION IN *b*-METRIC SPACES

Nguyen Van Dung[1*] and Nguyen Thi Truc Linh[2]

[1]Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, Dong Thap University

[2]Student, Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, Dong Thap University

[*]Corresponding author: nvdung@dthu.edu.vn

Article history

Received: 04/4/2021; Received in revised form: 02/6/2021; Accepted: 18/6/2021

Abstract

In this paper, we extend the Ciric type condition in b-metric spaces (Lu và cs., 2019) by adding four terms $\rho(T^2x,x), \rho(T^2x,Tx), \rho(T^2x,y), \rho(T^2x,Ty)$, *to become*

$$\rho(Tx,Ty) \le \lambda\, max\{\rho(x,y), \rho(x,Tx), \rho(y,Ty), \rho(x,Ty),$$
$$\rho(Tx,y), \rho(T^2x,x), \rho(T^2x,Tx), \rho(T^2x,y), \rho(T^2x,Ty)\}$$

where W *is the b-metric space,* $T: W \to W$ *and* $x, y \in W$.

Keywords: *Fixed point, b-metric space, generalized Ciric type contraction, Fatou property.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.11.2.2022.932

Trích dẫn: Nguyễn Văn Dũng và Nguyễn Thị Trúc Linh. (2022). Điều kiện co Ciric suy rộng trong không gian *b*-metric. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 11*(2), 3-12.

1. Giới thiệu

Lí thuyết điểm cố định metric được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây. Nguyễn Văn Dũng và Nguyễn Chí Tâm (2014) đã thiết lập và chứng minh điểm cố định cho dạng ϕ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-metric, ở đây không gian kiểu-metric là một trường hợp đặc biệt của không gian *b*-metric. Karapinar, Kieu Phuong Chi và Tran Duc Thanh (2012) đã chứng minh một cách tổng quát của điều kiện co Ciric cho hai ánh xạ *T* và *S*. Lê Thị Thủy Hằng (2017) đã nghiên cứu dạng tổng quát của không gian *b*-metric giá trị phức và thiết lập tính chất giữa *b*-metric giá trị phức và chứng minh được rằng bốn ánh xạ *T, S, A, B* có duy nhất điểm cố định trong không gian *b*-metric giá trị phức từ định lí điểm cố định trong không gian *b*-metric.

Nhiều điều kiện về sự tồn tại và tính duy nhất của điểm cố định trong không gian metric và nhiều không gian metric suy rộng khác đã được thiết lập và chứng minh. Trong đó có các dạng mở rộng điều kiện co Ciric và không gian *b*-metric. Lưu ý rằng, điều kiện co Ciric được giới thiệu trong tài liệu Ciric (1974) và là một trong những điều kiện co tổng quát nổi tiếng trong Lí thuyết điểm cố định metric còn không gian *b*-metric là một trong những mở rộng của không gian metric. Amini-Harandi (2014) đã nghiên cứu điều kiện co Ciric trong không gian *b*-metric bằng cách bổ sung tính chất Fatou. Kumam *và cs.* (2015) giới thiệu điều kiện co Ciric suy rộng trong không gian metric bằng cách thêm 4 số hạng

$$d(T^2x,x), d(T^2x,Tx), d(T^2x,y), d(T^2x,Ty)$$

và chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất điểm cố định với điều kiện co này. Lu *và cs.* (2019) đã xây dựng những ví dụ chứng tỏ rằng tính liên tục của *b*-metric thực sự mạnh hơn tính chất Fatou trong không gian *b*-metric và thiết lập một định lí điểm cố định mới cho điều kiện đủ cơ bản và cốt yếu với điều kiện co Ciric với hệ số co $\lambda \in [\frac{1}{s}, 1)$ trong không gian *b*-metric đầy đủ và có điểm cố định duy nhất. Chúng tôi nhận thấy rằng, những kết quả chính trong tài liệu Lu *và cs.* (2019) có thể được mở rộng bằng cách sử dụng kĩ thuật trong tài liệu Kumam *và cs.* (2015) để có được kết quả tổng quát hơn trong không gian *b*-metric.

Trong bài viết này, chúng tôi mở rộng kiểu co Ciric trong không gian *b*-metric (Lu, He và Du, 2019) bằng cách thêm vào 4 số hạng $\rho(T^2x,x), \rho(T^2x,Tx)$, $\rho(T^2x,y), \rho(T^2x,Ty)$, để trở thành

$$\rho(Tx,Ty) \leq \lambda \max\{\rho(x,y), \rho(x,Tx), \rho(y,Ty), \rho(x,Ty), \rho(Tx,y), \rho(T^2x,x), \rho(T^2x,Tx), \rho(T^2x,y), \rho(T^2x,Ty)\}$$

trong đó W là không gian *b*-metric, $T: W \to W$ và $x,y \in W$.

2. Một số khái niệm và kết quả cơ bản trong không gian *b*-metric

Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản được sử dụng trong bài báo.

Định nghĩa dưới đây được mở rộng từ định nghĩa của không gian metric bằng cách nhân hệ số $s \geq 1$ vào vế phải bất đẳng thức tam giác.

Định nghĩa 1.1 (Czerwik, 1998). Giả sử W là một tập hợp khác rỗng và $s \geq 1$ là một số thực cho trước. Ánh xạ $\rho: W \times W \to [0,\infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x,y,z \in W$,

1. $\rho(x,y) = 0$ nếu và chỉ nếu $x = y$.
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.
3. $\rho(x,y) \leq s[\rho(x,z) + \rho(z,y)]$.

Khi đó

1. ρ được gọi là một *b-metric* trên W mà (W,ρ,s) được gọi là một *không gian b-metric.*

2. Dãy $\{z_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến $z \in W$ nếu $\lim_{n\to\infty} \rho(z_n,z) = 0$.

3. Dãy $\{z_n\}$ được gọi là *Cauch*y nếu $\lim_{m,n\to\infty} \rho(z_m,z_n) = 0$.

4. Không gian *b*-metric (W,ρ,s) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy là một dãy hội tụ.

Amini-Harandi (2014) đã đưa ra định nghĩa sau đây về tính chất Fatou để nghiên cứu kết quả điểm cố định mới trong không gian *b*-metric.

Định nghĩa 1.2 ((Amini-Harandi, 2014), Định nghĩa 2.4). Giả sử (W,ρ,s) là không gian *b*-metric. Khi đó ρ được gọi là có *tính chất Fatou* nếu với $\{z_n\} \subset W$, $\lim_{n\to\infty} \rho(z_n,z) = 0$ và $y \in W$ thì

$$\rho(z,y) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(z_n,y).$$

Tiếp theo, chúng tôi trình bày định nghĩa điều kiện co Ciric. Định nghĩa này là mở rộng của Nguyên lí co Banach (Banach, 1922) định lí điểm cố định Kannan (Kannan, 1969) và định lí điểm cố định Chatterjea (Chatterjea, 1972).

Định nghĩa 1.3 ((Lu *và cs.*, 2019), Định nghĩa 4**).** Giả sử (W, ρ, s) là một không gian *b*-metric và ánh xạ $T: W \to W$.

1. Điểm $x \in W$ được gọi là *điểm cố định* của T nếu $Tx = x$.

2. T được gọi là một *kiểu co Ciric* nếu tồn tại $\lambda \in [0,1)$ sao cho với mọi $x, y \in W$,

$$\rho(Tx, Ty) \leq \lambda \max\{\rho(x, y), \rho(x, Tx), \rho(y, Ty), \rho(x, Ty), \rho(Tx, y).$$

Bổ đề sau đây là một bất đẳng thức trong tập số thực và được sử dụng trong chứng minh kết quả chính của bài viết.

Bổ đề 1.4 ((Lu *và cs.*, 2019), Bổ đề 1**).** *Giả sử $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là hai dãy số thực. Nếu $\{a_n\}$ hội tụ thì*

$$\liminf_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} \leq \max\{\lim_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} b_n\}.$$

Định lí sau đây trình bày sự tồn tại và tính duy nhất điểm cố định cho kiểu co Ciric trong không gian *b*-metric.

Định lí 1.5 ((Lu *và cs.*, 2019), Định lí 3**).** *Giả sử*

1. (W, ρ, s) là một không gian b-metric đầy đủ.

2. Ánh xạ $T: W \to W$ là một kiểu co Ciric.

Khi đó

1. Nếu $s = 1$ thì T có duy nhất điểm cố định $v \in W$ và $\lim_{n\to\infty} T^n z = v$ với mọi $z \in W$.

2. Nếu $s > 1$ và một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

(a) T liên tục;

(b) ρ thỏa mãn tính chất Fatou;

(c) $\lambda \in \left[0, \frac{1}{s}\right)$;

thì T có duy nhất điểm cố định $v \in W$ và $\lim_{n\to\infty} T^n z = v$ với mọi $z \in W$.

Bổ đề sau thiết lập tính duy nhất của giới hạn trong không gian *b*-metric.

Bổ đề 1.6. ((Tran Van An *và cs.*, 2015), Nhận xét 3.1) *Giả sử (W, ρ, s) là một không gian b-metric và dãy $\{x_n\} \subset W$. Nếu $\{x_n\}$ hội tụ thì giới hạn điểm của $\{x_n\}$ là duy nhất.*

3. Kết quả chính

Trước hết, chúng tôi trình bày định nghĩa mở rộng của Định nghĩa 4 trong (Lu *và cs.*, 2019) từ kiểu co Ciric sang kiểu co Ciric suy rộng bằng cách thêm 4 số hạng $\rho(T^2x, x)$, $\rho(T^2x, Tx)$, $\rho(T^2x, y)$, $\rho(T^2x, Ty)$ vào vế phải của điều kiện co.

Định nghĩa 2.1. Giả sử (W, ρ, s) là một không gian *b*-metric và ánh xạ $T: W \to W$. Khi đó T được gọi là một *kiểu co Ciric suy rộng* nếu tồn tại $\lambda \in [0,1)$ sao cho với mọi $x, y \in W$,

$$\rho(Tx, Ty) \leq \lambda \max\{\rho(x, y), \rho(x, Tx), \rho(y, Ty), \rho(x, Ty), \rho(Tx, y), \rho(T^2x, x), \rho(T^2x, Tx), \rho(T^2x, y), \rho(T^2x, Ty)\}. \quad (2.1)$$

Ví dụ sau đây trình bày một ánh xạ thỏa mãn điều kiện kiểu co Ciric suy rộng mà không thỏa mãn điều kiện kiểu co Ciric.

Ví dụ 2.2 ((Kumam *và cs.*, 2015), Ví dụ 2.5**).** Giả sử

1. $X = \{1,2,3,4,5\}$ với

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = y \\ 2 & \text{nếu } (x, y) \in \{(1,4), (1,5), (4,1), (5,1)\} \\ 1 & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

2. Ánh xạ $T: X \to X$ được xác định bởi

$$T1 = T2 = T3 = 1, T4 = 2, T5 = 3.$$

Khi đó

1. d là một metric trên X.

2. T là ánh xạ kiểu co Ciric suy rộng.

3. T không là ánh xạ kiểu co Ciric.

Giải. (1). Với mọi $x, y, z \in X$ ta có $d(x, y) \geq 0$,

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$d(x, y) = d(y, x),$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Vậy d là một metric trên X.

(2). *Trường hợp 1.* $x, y \in \{1, 2, 3\}$ hoặc $(x, y) \in \{(4,4), (5,5)\}$. Ta có

$$d(Tx, Ty) = d(T1, T2) = d(T1, T3) = d(T2, T3) = d(T1, T1)$$

$= d(T2, T2) = d(T3, T3) = d(1,1) = 0;$

$d(T4, T4) = d(T5, T5) = 0.$

Từ đó ta có với mọi $\lambda \in [0,1)$ thì

$$d(Tx, Ty) = 0 \le \lambda \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(Tx,y), d(T^2x, x), d(T^2x, Tx), d(T^2x, y), d(T^2x, Ty)\}.$$

Trường hợp 2. $(x, y) \in \{(1,4), (2,4), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)\}$. Ta có

$d(T1, T4) = d(T2, T4) = d(T3, T4) = d(1,2) = 1;$

$d(T4, T1) = d(T4, T2) = d(T4, T3) = d(2,1) = 1;$

$d(T1,4) = d(T2,4) = d(T3,4) = d(1,4) = 2;$

$d(T^2 1, 4) = d(T^2 2, 4) = d(T^2 3, 4) = d(1,4) = 2;$

$d(T^2 1, T4) = d(T^2 2, T4) = d(T^2 3, T4) = d(1,2) = 1;$

$d(T^2 4, 1) = d(T^2 4, T1) = d(T^2 4, T2) = d(T^2 4, T3) = d(1,1) = 0;$

$d(T^2 4, 2) = d(1,2) = 1;$

$d(T^2 4, 3) = d(1,3) = 1.$

Từ đó ta có với mọi $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ thì

$$d(T1, T4) = 1 \le \lambda \max\{2, 0, 1, 1, 2, 0, 0, 2, 1\} = \lambda \max\{d(1,4), d(1,T1), d(4,T4), d(1,T4), d(T1,4), d(T^2 1,1), d(T^2 1, T1), d(T^2 1,4), d(T^2 1, T4)\};$$

$$d(T2, T4) = d(T3, T4) = 1 \le \lambda \max\{1, 1, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1\} = \lambda \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(Tx,y), d(T^2x, x), d(T^2x, Tx), d(T^2x, y), d(T^2x, Ty)\};$$

$$d(T4, T1) = 1 \le \lambda \max\{2, 1, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 0\} = \lambda \max\{d(4,1), d(4,T4), d(1,T1), d(4,T1), d(T4,1), d(T^2 4,4), d(T^2 4, T4), d(T^2 4,1), d(T^2 4, T1)\};$$

$$d(T4, T2) = 1 \le \lambda \max\{1, 1, 1, 2, 0, 2, 1, 1, 0\} = \lambda \max\{d(4,2), d(4,T4), d(2,T2), d(4,T2), d(T4,2), d(T^2 4,4), d(T^2 4, T4), d(T^2 4,2), d(T^2 4, T2)\};$$

$$d(T4, T3) = 1 \le \lambda \max\{1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 0\} = \lambda \max\{d(4,3), d(4,T4), d(3,T3), d(4,T3), d(T4,3), d(T^2 4,4), d(T^2 4, T4), d(T^2 4,3), d(T^2 4, T3)\}.$$

Trường hợp 3. $(x, y) \in \{(1,5), (2,5), (3,5), (5,1), (5,2), (5,3)\}$. Ta có

$d(T1, T5) = d(T2, T5) = d(T3, T5) = d(1,3) = 1;$

$d(T5, T1) = d(T5, T2) = d(T5, T3) = d(3,1) = 1;$

$d(T1,5) = d(T2,5) = d(T3,5) = d(1,5) = 2;$

$d(T^2 1, 5) = d(T^2 2, 5) = d(T^2 3, 5) = d(1,5) = 2;$

$d(T^2 1, T5) = d(T^2 2, T5) = d(T^2 3, T5) = d(1,3) = 1;$

$d(T^2 5, 1) = d(T^2 5, T1) = d(T^2 5, T2) = d(T^2 5, T3) = d(1,1) = 0;$

$d(T^2 5, 2) = d(1,2) = 1;$

$d(T^2 5, 3) = d(1,3) = 1.$

Từ đó ta có với mọi $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ thì

$$d(T1, T5) = 1 \le \lambda \max\{2, 0, 1, 1, 2, 0, 0, 2, 1\} = \lambda \max\{d(1,5), d(1,T1), d(5,T5), d(1,T5), d(T1,5), d(T^2 1,1), d(T^2 1, T1), d(T^2 1,5), d(T^2 1, T5)\};$$

$d(T2,T5) = d(T3,T5) = 1$
$\leq \lambda \max\{1,1,1,0,2,1,0,2,1\}$
$= \lambda \max\{d(x,y), d(x,Tx),$
$d(y,Ty), d(x,Ty), d(Tx,y),$
$d(T^2x,x), d(T^2x,Tx),$
$d(T^2x,y), d(T^2x,Ty)\};$

$d(T5,T1) = 1$
$\leq \lambda \max\{2,1,0,2,1,2,1,0,0\}$
$= \lambda \max\{d(5,1), d(5,T5),$
$d(1,T1), d(5,T1), d(T5,1),$
$d(T^25,5), d(T^25,T5),$
$d(T^25,1), d(T^25,T1)\};$

$d(T5,T2) = 1$
$\leq \lambda \max\{1,1,1,2,1,2,1,1,0\}$
$= \lambda \max\{d(5,2), d(5,T5),$
$d(2,T2), d(5,T2), d(T5,2),$
$d(T^25,5), d(T^25,T5),$
$d(T^25,2), d(T^25,T2)\};$

$d(T5,T3) = 1$
$\leq \lambda \max\{1,1,1,2,0,2,1,1,0\}$
$= \lambda \max\{d(5,3), d(5,T5),$
$d(3,T3), d(5,T3), d(T5,3),$
$d(T^25,5), d(T^25,T5),$
$d(T^25,3), d(T^25,T3)\}.$

Trường hợp 4. $(x,y) \in \{(4,5),(5,4)\}$.

Ta có

$$d(T4,T5) = d(2,3) = 1;$$
$$d(T4,5) = d(4,T4) = d(5,T5) = d(4,T5) = d(5,T4) = 1;$$
$$d(T^24,4) = d(T2,4) = d(1,4) = 2;$$
$$d(T^24,5) = d(T2,5) = d(1,5) = 2;$$
$$d(T^24,T4) = d(T^25,T4) = d(1,2) = 1;$$
$$d(T^25,T5) = d(T3,3) = d(1,3) = 1;$$
$$d(T^24,T5) = d(T2,3) = d(1,3) = 1;$$
$$d(T^25,4) = d(T3,4) = d(1,4) = 2;$$
$$d(T^25,5) = d(T3,5) = d(1,5) = 2.$$

Từ đó ta có với mọi $\lambda \in \left[\frac{1}{2},1\right)$ thì

$(Tx,Ty) = 1$
$\leq \lambda \max\{1,1,1,1,1,2,1,2,1\}$
$= \lambda \max\{d(x,y), d(x,Tx),$
$d(y,Ty), d(x,Ty), d(Tx,y),$
$d(T^2x,x), d(T^2x,Tx),$
$d(T^2x,y), d(T^2x,Ty)\}.$

Từ những trường hợp trên ta suy ra (2.1) được thỏa mãn với mọi $x,y \in X$. Vậy T là ánh xạ kiểu co Ciric suy rộng.

(3). Ta có với $\lambda \in [0,1)$ thì

$d(T4,T5) = 1 > \lambda \max\{1,1,1,1,1\}$
$= \lambda \max\{d(4,5), d(4,T4),$
$d(5,T5), d(4,T5), d(T4,5)\}.$

Điều này chứng tỏ T không phải là ánh xạ kiểu co Ciric.

Bổ đề 2.3 sau đây là mở rộng của Bổ đề 2 trong (Lu *và cs.*, 2019) từ kiểu co Ciric sang kiểu co Ciric suy rộng.

Bổ đề 2.3. *Giả sử*

1. (W,ρ,s) *là một không gian b-metric.*

2. Ánh xạ $T: W \to W$ *là một kiểu co Ciric suy rộng.*

3. $z = z_0 \in W$ *và* $\{z_n\}$ *là một dãy được xác định bởi* $z_n = Tz_{n-1} = T^nz_0$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$.

4. Tập con H của $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *được xác định bởi*

$H = \{(m,n): m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ *và* $m < n\}$.

5. Ánh xạ $L: H \to [0,\infty)$ *được xác định bởi*

$$L(m,n) = \max\{\rho(z_i,z_j): m \leq i < j \leq n\}.$$

Khi đó

1. Với mọi $(m,n) \in H$ *và* $n - m > 1$.

2. $L(m,n) = \max\{\rho(z_m,z_j): m < j \leq n\}$ *với mọi* $(m,n) \in H$.

3. Tồn tại $M > 0$ *sao cho* $L(0,n) \leq M$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. (1). Giả sử $(m,n) \in H$, $n - m > 1$. Với mọi $i,j \in \mathbb{N}$ và $m + 1 \leq i < j \leq n$, vì T là một kiểu co Ciric suy rộng nên

$\rho(z_i,z_j) = \rho(Tz_{i-1},Tz_{j-1})$
$\leq \lambda \max\{\rho(z_{i-1},z_{j-1}),$
$\rho(z_{i-1},Tz_{i-1}), \rho(z_{j-1},Tz_{j-1}),$
$\rho(z_{i-1},Tz_{j-1}), \rho(Tz_{i-1},z_{j-1}),$

$$\rho(T^2z_{i-1},z_{i-1}),\rho(T^2z_{i-1},Tz_{i-1}),$$
$$\rho(T^2z_{i-1},z_{j-1}),\rho(T^2z_{i-1},Tz_{j-1})\}$$
$$=\lambda\max\{\rho(z_{i-1},z_{j-1}),\rho(z_{i-1},z_i),$$
$$\rho(z_{j-1},z_j),\rho(z_{i-1},z_j),\rho(z_i,z_{j-1}),$$
$$\rho(z_{i+1},z_{i-1}),\rho(z_{i+1},z_i),$$
$$\rho(z_{i+1},z_{j-1}),\rho(z_{i+1},z_j)\} \qquad (2.2)$$

Đặt $P(m,n)=\{\rho(z_i,z_j): m\le i<j\le n\}$.

Vì $m+1\le i<j\le n$ nên ta có

$$m\le i-1<j-1\le n,$$
$$m\le i-1<i\le n,$$
$$m\le j-1<j\le n,$$
$$m\le i-1<j\le n,$$
$$m\le i\le j-1\le n,$$
$$m\le i+1<i-1\le n,$$
$$m\le i+1<i\le n,$$
$$m\le i+1<j-1\le n,$$
$$m\le i+1<j\le n.$$

Từ đó suy ra $\{\rho(z_{i-1},z_{j-1}),\rho(z_{i-1},z_i),$
$\rho(z_{j-1},z_j),\rho(z_{i-1},z_j),\rho(z_i,z_{j-1}),$
$\rho(z_{i+1},z_{i-1}),\rho(z_{i+1},z_i),\rho(z_{i+1},z_{j-1}),$
$\rho(z_{i+1},z_j)\}\subset P(m,n)\cup\{0\}$.

Vì vậy,

$$\max\{\rho(z_{i-1},z_{j-1}),\rho(z_{i-1},z_i),\rho(z_{j-1},z_j),$$
$$\rho(z_{i-1},z_j),\rho(z_i,z_{j-1}),\rho(z_{i+1},z_{i-1}),$$
$$\rho(z_{i+1},z_i),\rho(z_{i+1},z_{j-1}),\rho(z_{i+1},z_j)\}$$
$$\le\max\{P(m,n)\cup\{0\}\}$$
$$=\max P(m,n)$$
$$=L(m,n).$$

Kết hợp (2.2) ta suy ra $\rho(z_i,z_j)\le\lambda L(m,n)$ với $m+1\le i<j\le n$.

Vậy $L(m+1,n)\le\lambda L(m,n)$.

(2). Xét $(m,n)\in H$.

Giả sử $L(m,n)=0$. Khi đó $\max\{\rho(z_i,z_j): m\le i<j\le n\}=0$. Suy ra $\rho(z_i,z_j)=0$ với mọi $m\le i<j\le n$. Vậy $\max\{\rho(z_m,z_j): m<j\le n\}=0$.

Giả sử $L(m,n)>0$. Từ ý (1) ta có với $m+1\le i<j\le n$,

$$\rho(z_i,z_j)\le\lambda L(m,n)<L(m,n).$$

Suy ra $L(m,n)=\max\left\{\{\rho(z_i,z_j): m\le i<j\le n\}\backslash\{\rho(z_i,z_j): m+1\le i<j\le n\}\right\}=\max\{\rho(z_i,z_j): m=i<j\le n\}$
$=\max\{\rho(z_m,z_j): m<j\le n\}$.

(3). Vì $\lambda\in[0,1)$ nên tồn tại $q\in\mathbb{N}$ sao cho $\lambda^q<\frac{1}{s}$. Nếu $L(0,n)\le L(0,q)$ với mọi $n\in\mathbb{N}$ thì (3) xảy ra. Ngược lại tồn tại $n_q\in\mathbb{N}$ sao cho $L(0,n_q)>L(0,q)$. Khi đó theo ý (2) ta có $0<j\le n_q$ sao cho $\rho(z_0,z_j)=L(0,n_q)$. Nếu $0<j\le q$ thì $L(0,n_q)=\rho(z_0,z_j)\le L(0,q)$ điều này mâu thuẫn vì $L(0,n_q)>L(0,q)$. Vậy $q<j\le n_q$. Áp dụng ý (1) ta có

$$\begin{aligned}\rho(z_0,z_j)&\le s\rho(z_0,z_q)+s\rho(z_q,z_j)\\&\le s\rho(z_0,z_q)+sL(q,n_q)\\&\le s\rho(z_0,z_q)+s\lambda L(q-1,n_q)\\&\le \dots\\&\le s\rho(z_0,z_q)+s\lambda^qL(0,n_q).\end{aligned}$$

Suy ra

$L(0,n_q)\le s\rho(z_0,z_q)+s\lambda^qL(0,n_q)$. Vậy $L(0,n_q)\le\frac{s}{1-s\lambda^q}\rho(z_0,z_q)$.

Đặt $M:=\max\left\{L(0,q),\frac{s}{1-s\lambda^q}\rho(z_0,z_q)\right\}$. Do đó, ta được $L(0,n)\le M$ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Bổ đề 2.4 sau đây là mở rộng của Bổ đề 3 trong (Lu *và cs.*, 2019) từ kiểu co Ciric sang kiểu co Ciric suy rộng.

Bổ đề 2.4. *Giả sử*

1. (W,ρ,s) là một không gian b-metric.

2. Ánh xạ $T: W\to W$ là một kiểu co Ciric suy rộng.

Khi đó với mọi $z\in W$ và $\{T^nz\}$ là một dãy Cauchy trong W.

Chứng minh. Giả sử $(m,n)\in H$, bằng cách áp dụng Bổ đề 2.3, tồn tại $M>0$ sao cho

$$\begin{aligned}\rho(z_m,z_n)&\le L(m,n)\\&\le\lambda L(m-1,n)\\&\le\dots\end{aligned}$$

$$\leq \lambda^m L(0,n)$$
$$\leq \lambda^m M.$$

Vì $\lambda < [0,1)$ nên cho $m, n \to \infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

$$\lim_{m,n\to\infty} \rho(z_m, z_n) = 0.$$

Vậy $\{z_n\}$ là dãy Cauchy trong W.

Bằng cách sử dụng Bổ đề 2.3 và Bổ đề 2.4, chúng tôi chứng minh định lí điểm cố định sau đây cho kiểu co Ciric suy rộng trong một không gian b-metric đầy đủ.

Định lí 2.5. *Giả sử*

1. (W, ρ, s) là một không gian b-metric đầy đủ.

2. Ánh xạ $T: W \to W$ là một kiểu co Ciric suy rộng.

Khi đó

1. Nếu $s = 1$ thì T có duy nhất điểm cố định $y \in W$ và $\lim_{n\to\infty} T^n z = y$ với mọi $z \in W$.

2. Nếu $s > 1$ và một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

(a) T liên tục;

(b) ρ thỏa mãn tính chất Fatou;

(c) $\lambda \in \left[0, \frac{1}{s}\right)$;

thì T có duy nhất điểm cố định $y \in W$ và $\lim_{n\to\infty} T^n z = y$ với mọi $z \in W$.

Chứng minh. Giả sử $z = z_0 \in W$ và $\{z_n\}$ là dãy được xác định bởi $z_n = Tz_{n-1} = T^n z$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Áp dụng Bổ đề 2.3, dãy $\{z_n\}$ là một dãy Cauchy trong W. Vì W là đầy đủ nên tồn tại $y \in W$ sao cho $\lim_{n\to\infty} T^n z = y$.

Tiếp theo ta chứng minh nếu T có điểm cố định thì điểm cố định là duy nhất. Giả sử x, x' là hai điểm cố định của T.

Ta có

$$\rho(Tx, x') = \rho(x, Tx') = \rho(T^2x, x') = \rho(T^2x, Tx') = \rho(x, x')$$

và

$$\rho(x, Tx) = \rho(x', Tx') = \rho(T^2x, x) = \rho(T^2x, Tx) = 0.$$

Từ (2.1) ta có

$$0 \leq \rho(x, x') = \rho(Tx, Tx')$$
$$\leq \lambda \max\{\rho(x, x'), \rho(x, Tx), \rho(x', Tx'), \rho(x, Tx'), \rho(Tx, x'), \rho(T^2x, x), \rho(T^2x, Tx), \rho(T^2x, x'), \rho(T^2x, Tx')\}$$
$$= \lambda\, \rho(x, x').$$

Vì $\lambda \in [0,1)$ nên $\rho(x, x') = 0$. Do đó $x = x'$. Vậy nếu T có điểm cố định thì điểm cố định là duy nhất.

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh T có điểm cố định.

(1). Giả sử $s = 1$. Khi đó (W, ρ, s) là một không gian metric đầy đủ. Vì T là kiểu co Ciric suy rộng nên với mọi $n \in \mathbb{N}$,

$$\rho(z_{n+1}, Ty) = \rho(Tz_n, Ty)$$
$$\leq \lambda \max\{\rho(z_n, y), \rho(z_n, Tz_n), \rho(y, Ty), \rho(z_n, Ty), \rho(Tz_n, y), \rho(T^2z_n, z_n), \rho(T^2z_n, Tz_n), \rho(T^2z_n, y), \rho(T^2z_n, Ty)\}$$
$$= \lambda \max\{\rho(z_n, y), \rho(z_n, z_{n+1}), \rho(y, Ty), \rho(z_n, Ty), \rho(z_{n+1}, y), \rho(z_{n+2}, z_n), \rho(z_{n+2}, z_{n+1}), \rho(z_{n+2}, y), \rho(z_{n+2}, Ty)\}.$$

Vì $\lim_{n\to\infty} z_n = y$ và ρ liên tục, cho $n \to \infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

$$0 \leq \rho(y, Ty) \leq \lambda\, \rho(y, Ty).$$

Vì $\lambda \in [0,1)$ nên $\rho(y, Ty) = 0$. Do đó $y = Ty$. Vậy y là điểm cố định của T.

(2). Giả sử $s > 1$ và (2a) xảy ra. Từ tính liên tục của T ta có

$$y = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} Tz_{n-1} = T\left(\lim_{n\to\infty} z_{n-1}\right) = Ty.$$

Vậy y là điểm cố định của T.

Giả sử (2b) xảy ra. Từ T là kiểu co Ciric suy rộng ta có với mọi $n \in \mathbb{N}$,

$$\rho(z_{n+1}, Ty) = \rho(Tz_n, Ty)$$
$$\leq \lambda \max\{\rho(z_n, y), \rho(z_n, Tz_n), \rho(y, Ty), \rho(z_n, Ty), \rho(Tz_n, y), \rho(T^2z_n, z_n), \rho(T^2z_n, Tz_n), \rho(T^2z_n, y), \rho(T^2z_n, Ty)\}$$
$$= \lambda \max\{\rho(z_n, y), \rho(z_n, z_{n+1}),$$

$$\rho(y,Ty),\rho(z_n,Ty),$$
$$\rho(z_{n+1},y),\rho(z_{n+2},z_n),$$
$$\rho(z_{n+2},z_{n+1}),\rho(z_{n+2},y),$$
$$\rho(z_{n+2},Ty)\}. \qquad (2.3)$$

Vì $\lim_{n\to\infty} z_n = y$ và ρ có tính chất Fatou nên

$$\rho(y,Ty) \le \liminf_{n\to\infty}\rho(z_n,Ty)$$
$$= \liminf_{n\to\infty}\rho(z_{n+1},Ty)$$
$$= \liminf_{n\to\infty}\rho(z_{n+2},Ty). \qquad (2.4)$$

Mặt khác, vì $\lim_{n\to\infty} z_n = y$ và $\{z_n\}$ là dãy Cauchy nên

$$\lim_{n\to\infty}\rho(z_n,y) = \lim_{n\to\infty}\rho(z_n,z_{n+1})$$
$$= \lim_{n\to\infty}\rho(z_{n+1},y) = \lim_{n\to\infty}\rho(z_{n+2},z_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\rho(z_{n+2},z_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\rho(z_{n+2},y)$$
$$= 0. \qquad (2.5)$$

Bằng cách áp dụng Bổ đề 1.4 và (2.3), (2.4), (2.5) ta được

$$0 \le \rho(y,Ty) \le \liminf_{n\to\infty}\rho(z_{n+1},Ty)$$
$$= \liminf_{n\to\infty}\rho(Tz_n,Ty)$$
$$\le \liminf_{n\to\infty}(\lambda \max\{\rho(z_n,y),$$
$$\rho(z_n,Tz_n),\rho(y,Ty),$$
$$\rho(z_n,Ty),\rho(Tz_n,y),$$
$$\rho(T^2z_n,z_n),\rho(T^2z_n,Tz_n),$$
$$\rho(T^2z_n,y),\rho(T^2z_n,Ty)\})$$
$$= \liminf_{n\to\infty}(\lambda \max\{\rho(z_n,y),$$
$$\rho(z_n,z_{n+1}),\rho(y,Ty),$$
$$\rho(z_n,Ty),\rho(z_{n+1},y),$$
$$\rho(z_{n+2},z_n),\rho(z_{n+2},z_{n+1}),$$
$$\rho(z_{n+2},y),\rho(z_{n+2},Ty)\})$$
$$\le \lambda\max\{\lim_{n\to\infty}\rho(z_n,y),\lim_{n\to\infty}\rho(z_n,z_{n+1}),$$
$$\lim_{n\to\infty}\rho(y,Ty),\liminf_{n\to\infty}\rho(z_n,Ty),$$
$$\lim_{n\to\infty}\rho(z_{n+1},y),\lim_{n\to\infty}\rho(z_{n+2},z_n),$$
$$\lim_{n\to\infty}\rho(z_{n+2},z_{n+1}),\lim_{n\to\infty}\rho(z_{n+2},y),$$
$$\liminf_{n\to\infty}\rho(z_{n+2},Ty)\}$$
$$\le \lambda\max\{0,0,\rho(y,Ty),\liminf_{n\to\infty}\rho(z_n,Ty),$$
$$0,0,0,0,\liminf_{n\to\infty}\rho(z_{n+2},Ty)\}$$
$$\le \lambda\liminf_{n\to\infty}\rho(z_{n+2},Ty)$$
$$= \lambda\liminf_{n\to\infty}\rho(z_{n+1},Ty).$$

Từ đó ta có

$$0 \le \liminf_{n\to\infty}\rho(z_{n+1},Ty)$$
$$\le \lambda\liminf_{n\to\infty}\rho(z_{n+1},Ty).$$

Vì $\lambda\in[0,1)$ nên $\liminf_{n\to\infty}\rho(z_{n+1},Ty) = 0$.

Vì $0 \le \rho(y,Ty) \le \liminf_{n\to\infty}\rho(z_{n+1},Ty) = 0$ nên $\rho(y,Ty) = 0$. Do đó $y = Ty$. Vậy y là điểm cố định của T.

Giả sử (2c) xảy ra. Vì T là kiểu co Ciric suy rộng với hệ số co $\lambda\in\left[0,\frac{1}{s}\right)$ nên từ (2.1) ta có với mọi $n\in\mathbb{N}$,

$$\rho(z_{n+1},Ty) = \rho(Tz_n,Ty)$$
$$\le \lambda\max\{\rho(z_n,y),\rho(z_n,Tz_n),$$
$$\rho(y,Ty),\rho(z_n,Ty),\rho(Tz_n,y),$$
$$\rho(T^2z_n,z_n),\rho(T^2z_n,Tz_n),$$
$$\rho(T^2z_n,y),\rho(T^2z_n,Ty)\}$$
$$= \lambda\max\{\rho(z_n,y),\rho(z_n,z_{n+1}),$$
$$\rho(y,Ty),\rho(z_n,Ty),\rho(z_{n+1},y),$$
$$\rho(z_{n+2},z_n),\rho(z_{n+2},z_{n+1}),$$
$$\rho(z_{n+2},y),\rho(z_{n+2},Ty)\}. \qquad (2.6)$$

Ta có, nếu $\rho(z_{n+1},Ty) \le \lambda\rho(y,Ty)$ thì $\rho(z_{n+1},Ty) \le \lambda s\rho(z_{n+1},y) + \lambda s\rho(z_{n+1},Ty)$.

Ta cũng có $\rho(z_{n+1},Ty) \le \lambda s\rho(z_{n+1},y) + \lambda s\rho(z_{n+1},Ty)$

$$\Leftrightarrow \lambda s\rho(z_{n+1},y) \ge \rho(z_{n+1},Ty) - \lambda s\rho(z_{n+1},Ty)$$
$$\Leftrightarrow \lambda s\rho(z_{n+1},y) \ge (1-\lambda s)\rho(z_{n+1},Ty).$$

Vì $\lambda\in\left[0,\frac{1}{s}\right)$ nên $1-\lambda s > 0$. Do đó $\rho(z_{n+1},Ty) \le \frac{\lambda s}{1-\lambda s}\rho(z_{n+1},y)$.

Nếu $\rho(z_{n+1},Ty) \le \lambda\rho(z_n,Ty)$ thì $\rho(z_{n+1},Ty) \le \lambda s\rho(z_n,z_{n+1}) + \lambda\rho(z_{n+1},Ty)$.

Ta có $\rho(z_{n+1},Ty) \le \lambda s\rho(z_n,z_{n+1}) + \lambda\rho(z_{n+1},Ty)$

$$\Leftrightarrow \lambda s\rho(z_n,z_{n+1}) \ge \rho(z_{n+1},Ty) - \lambda s\rho(z_{n+1},Ty)$$
$$\Leftrightarrow \lambda s\rho(z_n,z_{n+1}) \ge (1-\lambda s)\rho(z_{n+1},Ty).$$

Vì $\lambda \in \left[0, \frac{1}{s}\right)$ nên $1 - \lambda s > 0$. Do đó $\rho(z_{n+1}, Ty) \leq \frac{\lambda s}{1 - \lambda s}\rho(z_n, z_{n+1})$.

Nếu $\rho(z_{n+1}, Ty) \leq \lambda\rho(z_{n+2}, Ty)$ thì $\rho(z_{n+1}, Ty) \leq \lambda s\rho(z_{n+2}, z_{n+1}) + \lambda\rho(z_{n+1}, Ty)$.

Ta có $\rho(z_{n+1}, Ty) \leq \lambda s\rho(z_{n+2}, z_{n+1}) + \lambda s\rho(z_{n+1}, Ty)$

$\Leftrightarrow \lambda s\rho(z_{n+2}, z_{n+1}) \geq \rho(z_{n+1}, Ty) - \lambda s\rho(z_{n+1}, Ty)$

$\Leftrightarrow \lambda s\rho(z_{n+2}, z_{n+1}) \geq (1 - \lambda s)\rho(z_{n+1}, Ty)$.

Vì $\lambda \in \left[0, \frac{1}{s}\right)$ nên $1 - \lambda s > 0$. Do đó $\rho(z_{n+1}, Ty) \leq \frac{\lambda s}{1 - \lambda s}\rho(z_{n+2}, z_{n+1})$.

Do đó, kết hợp với (2.6) ta có với mọi $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \rho(z_{n+1}, Ty) \\
&\leq \lambda \max\{\rho(z_n, y), \rho(z_n, z_{n+1}), \\
&\frac{\lambda s}{1 - \lambda s}\rho(z_{n+1}, y), \frac{\lambda s}{1 - \lambda s}\rho(z_n, z_{n+1}), \\
&\rho(z_{n+1}, y), \rho(z_{n+2}, z_n), \rho(z_{n+2}, z_{n+1}), \\
&\rho(z_{n+2}, y), \frac{\lambda s}{1 - \lambda s}\rho(z_{n+2}, z_{n+1})\}. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Vì $\lim_{n\to\infty} z_n = y$ và $\{z_n\}$ là dãy Cauchy nên ta có

$$\begin{gathered}
\lim_{n\to\infty} \max\{\rho(z_n, y), \rho(z_n, z_{n+1}), \\
\frac{\lambda s}{1 - \lambda s}\rho(z_{n+1}, y), \frac{\lambda s}{1 - \lambda s}\rho(z_n, z_{n+1}), \\
\rho(z_{n+1}, y), \rho(z_{n+2}, z_n), \rho(z_{n+2}, z_{n+1}), \\
\rho(z_{n+2}, y), \frac{\lambda s}{1 - \lambda s}\rho(z_{n+2}, z_{n+1})\} = 0.
\end{gathered}$$

Vì vậy, cho $n \to \infty$ trong (2.7) ta được

$$\lim_{n\to\infty} \rho(z_{n+1}, Ty) = 0.$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty} z_{n+1} = Ty$. Kết hợp với $\lim_{n\to\infty} z_n = y$ và tính duy nhất của giới hạn trong Bổ đề 1.6, ta có $Ty = y$. Vậy y là điểm cố định của T.

Ví dụ sau đây trình bày một ánh xạ có thể áp dụng Định lí 2.5 mà không thể áp dụng Định lí 1.5.

Ví dụ 2.6. Giả sử

1. $X = \{1,2,3,4,5\}$ với

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x = y \\ 2 \text{ nếu } (x, y) \in \{(1,4), (1,5), \\ \qquad\qquad (4,1), (5,1)\} \\ 1 \text{ trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

2. Ánh xạ $T: X \to X$ được xác định bởi

$$T1 = T2 = T3 = 1, T4 = 2, T5 = 3.$$

Khi đó

1. (X, d, s) là một không gian b-metric đầy đủ với $s = 1$.

2. T là ánh xạ kiểu co Ciric suy rộng. Do đó chúng ta có thể áp dụng Định lí 2.5 cho T.

3. T không là ánh xạ kiểu co Ciric. Do đó chúng ta không thể áp dụng Định lí 1.5 cho T.

Giải. (1). Theo Ví dụ 2.2 thì d là metric trên X. Do đó (X, d, s) là một không gian b-metric đầy đủ với $s = 1$. Ta chứng minh tính đầy đủ. Thật vậy, giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Ta có $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$. Do đó tồn tại n_0 sao cho với mọi $m, n \geq n_0$, ta có $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$. Theo định nghĩa của d ta suy ra $d(x_n, x_m) = 0$ hay $x_n = x_m$ với mọi $m, n \geq n_0$. Vậy $\lim_{n\to\infty} x_n = x_{n_0}$ hay dãy $\{x_n\}$ là dãy hội tụ.

(2). Theo Ví dụ 2.2.(2) thì T là ánh xạ kiểu co Ciric suy rộng.

(3). Theo Ví dụ 2.2.(3) thì T không là ánh xạ kiểu co Ciric.

Vì kiểu co Ciric là trường hợp riêng của kiểu co Ciric suy rộng nên từ Định lí 2.5 ta có hệ quả sau.

Hệ quả 2.7. ((Lu *và cs.*, 2019), Định lí 3). *Giả sử*

1. (W, ρ, s) là một không gian b-metric đầy đủ.

2. Ánh xạ $T: W \to W$ là một kiểu co Ciric.

Khi đó

1. Nếu $s = 1$ thì T có duy nhất điểm cố định $v \in W$ và $\lim_{n\to\infty} T^n z = v$ với mọi $z \in W$.

2. Nếu $s > 1$ và một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

(a) T liên tục.

(b) ρ thỏa mãn tính chất Fatou.

(c) $\lambda \in \left[0, \frac{1}{s}\right)$.

thì T có duy nhất điểm cố định $v \in W$ và $\lim_{n\to\infty} T^n z = v$ với mọi $z \in W$.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được sự hỗ trợ bởi đề tài mã số SPD2020.02.01.

Tài liệu tham khảo

Amini-Harandi, A. (2014). Fixed point theory for quasi-contraction maps in b-metric spaces. *Fixed Point Theory, 15*, 351-358.

Banach, S. (1922). Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux equations intégrales. *Fund. Math., 3*, 133-181.

Chatterjea, S. K. (1972). Fixed-point theorems. *C.R. Acad. Bulgare Sc, 25*, 727-730.

Ciric, L. B. (1974). A generalization of Banach's contraction principle. *Proc. Am. Math. Soc., 45*, 267-273.

Czerwik, S. (1998). Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces. *Atti Sem. Math. Fis.Univ. Modena, 46*, 263-276.

Kannan, R. (1969). Some results on fixed point-II. *Am. Math. Mon., 76*, 405-408.

Karapinar, E., Kieu Phuong Chi and Tran Duc Thanh. (2012). A generalization of Ciric quasicontractions. *Abstr. Appl. Anal.*, 1-9.

Kumam, P., Nguyen Van Dung and Sitthithakerngkiet, K. (2015). A generalization of Ciric fixed point theorem. *Filomat, 29*(7), 1549-1556.

Lê Thị Thủy Hằng. (2017). Khảo sát tính chất của không gian b-metric giá trị phức. *Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên, Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp*.

Lu, N., He, F and Du, W.-S. (2019). Fundamental questions and new counterexamples for b-metric spaces and Fatou property. *Mathematics 7, 11*, 1-15.

Nguyễn Văn Dũng và Nguyễn Chí Tâm. (2014). Điểm cố định cho dạng ϕ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-metric. *Tạp chí khoa học Trường Đại học An Giang,* (3), 27-32.

Tran Van An, Luong Van Tuyen and Nguyen Van Dung. (2015). Stone-type theorem on b-metric spaces and applications. *Topology Appl., 50*, 185-186.