THIẾT LẬP K-ĐIỂM TRÙNG KHÔNG ĐIỀU KIỆN GIAO HOÁN TRONG KHÔNG GIAN METRIC THỨ TỰ

Huỳnh Ngọc Cảm* **và Võ Đức Thịnh**

Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp

**Tác giả liên hệ: huynhngoccam@dthu.edu.vn*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 08/02/2022; Ngày nhận chỉnh sửa: 21/4/2022; Ngày duyệt đăng: 23/5/2022

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ I -đơn điệu mới và thiết lập định lí k -điểm trùng từ kết quả của Paknazar và các cộng sự không cần điều kiện giao hoán của các ánh xạ. Chúng tôi đưa ra ví dụ cho trường hợp ánh xạ không giao hoán mà kết quả của Paknazar và các cộng sự không áp dụng được.

Từ khóa: *Ánh xạ g -đơn điệu mới, ánh xạ I -đơn điệu mới, ánh xạ không giao hoán, k -điểm bất động, k -điểm trùng.*

K-COINCIDENCE POINT WITHOUT COMMUTATIVE CONDITION IN PARTIALLY ORDERED METRIC SPACES

Huynh Ngoc Cam* **and Vo Duc Thinh**

Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, Dong Thap University

**Corresponding author: huynhngoccam@dthu.edu.vn*

Article history

Received: 08/02/2022; Received in revised form: 21/4/2022; Accepted: 23/5/2022

Abstract

In this paper, we introduce the concept of a new I -monotone mapping and establish k -coincidence point results without any type of commutativity condition which improve the results of Paknazar et al. Also, we give a supporting example of non-commuting mappings where the results of Paknazar et al. cannot be applied.

Keywords: *New g -monotone mapping, new I -monotone mapping, non-commuting mappings, k -fixed point, k -coincidence point.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.12.2.2023.1028

Trích dẫn: Huỳnh Ngọc Cảm và Võ Đức Thịnh. (2023). Thiết lập k-điểm trùng không điều kiện giao hoán trong không gian metric thứ tự. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 12*(2), 22-26.

1. Mở đầu

Bhaskar và Lakshmikantham (2006) đã giới thiệu khái niệm bộ đôi điểm bất động và chứng minh được các định lí điểm bất động với các điều kiện nhất định. Sau đó, Lakshmikantham và Ćirić (2009) đã mở rộng các kết quả này bằng việc giới thiệu khái niệm bộ đôi điểm trùng và ánh xạ g -đơn điệu hỗn hợp. Borcut và Berinde (2012) đã giới thiệu khái niệm bộ ba điểm bất động và chứng minh các định lí có liên quan. Sau đó, Paknazar *và cs.* (2013) giới thiệu khái niệm ánh xạ g -đơn điệu mới, khái niệm n-điểm bất động, n-điểm trùng và thiết lập các định lí có liên quan cho loại ánh xạ này trong không gian mêtric thứ tự đầy đủ. Để chứng minh các kết quả của mình, các tác giả đã sử dụng một giả thiết quan trọng, đó là điều kiện giao hoán của hai ánh xạ. Câu hỏi đặt ra là: liệu chúng ta có thể chứng minh được các kết quả của Paknazar *và cs.* mà không cần đến giả thiết này? Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ đơn điệu mới và chứng minh kết quả n-điểm trùng đề cập trong (Paknazar *và cs.*, 2013) không cần điều kiện giao hoán hai ánh xạ. Trong phần cuối, chúng tôi cho ví dụ để chứng tỏ rằng các kết quả trong (Paknazar *và cs.*, 2013) không thỏa mãn nhưng nó thỏa mãn được cho kết quả của chúng tôi.

Định nghĩa 1.1 (Bhaskar và Lakshmikantham, 2006, Định nghĩa 1.1). Cho $(X,\le)$ là tập hợp sắp thứ tự bộ phận. Ánh xạ $F: X\times X\to X$ được gọi là *đơn điệu hỗn hợp* nếu $F(x,y)$ là đơn điệu không giảm đối với biến x và đơn điệu không tăng đối với biến y. Nghĩa là, với mỗi $x,y\in X$, ta có

$$x_1\le x_2 \Rightarrow F(x_1,y)\le F(x_2,y)$$

$$\text{và } y_1\le y_2 \Rightarrow F(x,y_1)\ge F(x,y_2)$$

với mọi $x_1,x_2 y_1,y_2\in X$.

Định nghĩa 1.2 (Bhaskar và Lakshmikantham, 2006, Định nghĩa 1.2). Phần tử $(x,y)\in X\times X$ được gọi là bộ đôi điểm bất động của ánh xạ $F: X\times X\to X$ nếu $F(x,y)=x,\ F(y,x)=y$.

Định nghĩa 1.3 (Lakshmikantham và Ćirić, 2009, Định nghĩa 2.1). Cho $F: X\times X\to X$ và $g: X\to X$ là hai ánh xạ. Ánh xạ F được gọi là g -đơn điệu hỗn hợp nếu F là g -không giảm đối với biến thứ nhất và g -không tăng đối với biến thứ hai. Nghĩa là, với mỗi $x,y\in X$,

$$gx_1\le gx_2 \Rightarrow F(x_1,y)\le F(x_2,y)$$

$$\text{và } gy_1\le gy_2 \Rightarrow F(x,y_1)\ge F(x,y_2)$$

với mọi $x_1,x_2,y_1,y_2\in X$.

Định nghĩa 1.4 (Lakshmikantham và Ćirić, 2009, Định nghĩa 2.2). Phần tử $(x,y)\in X\times X$ được gọi là bộ đôi điểm trùng của ánh xạ $F: X\times X\to X$ và $g: X\to X$ nếu $F(x,y)=gx, F(y,x)=gy.$

Năm 2013, *Paknazar và cs.* đã giới thiệu các khái niệm sau.

Định nghĩa 1.5 (Paknazar *và cs.*, 2013, Định nghĩa 2.1). Cho $F: X^k\to X$ là ánh xạ $(k\ge 2)$. Phần tử $(x_1,x_2,...,x_k)\in X^k$ gọi là một k - điểm bất động của F nếu

$$\begin{aligned}
&x_1 = F(x_1,x_2,...,x_{k-1},x_k),\\
&x_2 = F(x_2,x_3,...,x_k,x_1),\\
&.....................................\\
&x_k = F(x_k,x_1,x_2,...,x_{k-1}).
\end{aligned}$$

Định nghĩa 1.6 (Paknazar *và cs.*, 2013, Định nghĩa 2.3). Cho $g: X\to X$ và $F: X^k\to X$ $(k\ge 2)$ là hai ánh xạ. Phần tử $(x_1,x_2,...,x_k)\in X^k$ được gọi là một k -*điểm trùng* của F và g nếu

$$\begin{aligned}
&gx_1 = F(x_1,x_2,...,x_{k-1},x_k),\\
&gx_2 = F(x_2,x_3,...,x_k,x_1),\\
&.....................................\\
&gx_k = F(x_k,x_1,x_2,...,x_{k-1}).
\end{aligned}$$

Nếu lấy g là ánh xạ đồng nhất thì Định nghĩa 1.2 trở thành Định nghĩa 1.1.

Định nghĩa 1.7 (Paknazar *và cs.*, 2013, Định nghĩa 2.4). Cho $g: X\to X$ và $F: X^k\to X$ $(k\ge 2)$ là hai ánh xạ. Khi đó F và g được gọi là *giao hoán* nếu

$g(F(x_1,x_2,...,x_k))=F(gx_1,gx_2,...,gx_k)$ với mọi $(x_1,x_2,...,x_k)\in X^k$.

Định nghĩa 1.8 (Paknazar *và cs.*, 2013, Định nghĩa 2.2). Cho $g: X\to X$ và $F: X^k\to X$ $(k\ge 2)$ là hai ánh xạ. F được gọi là có tính g -*đơn điệu mới* nếu F là g -đơn điệu không giảm đối với phần tử thứ nhất. Nghĩa là, với mỗi $(x_1,x_2,...,x_k),(y_1,y_2,...,y_k)\in X^k$,

$$gx_1\le gy_1 \Rightarrow F(x_1,x_2,...,x_k)\le F(y_1,y_2,...,y_k).$$

Haghia, R. H *và cs.* (2011) đã giới thiệu và chứng minh kết quả sau đây.

Mệnh đề 1.9 (Haghia *và cs.*, 2011, Bổ đề 2.1). *Cho X là tập khác rỗng và $f: X\to X$ là ánh xạ. Khi đó tồn tại một tập con $E\subseteq X$ sao cho $f(E)=f(X)$ và $f:E\to X$ là đơn ánh.*

2. Kết quả chính

Trong Định nghĩa 1.8, cho g là ánh xạ đồng nhất, $g=I, I: X\to X$, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 2.1. Cho $F: X^k\to X$ $(k\ge 2)$ là một ánh xạ. F được gọi là có tính I *- đơn điệu mới* nếu F là đơn điệu không giảm đối với phần tử thứ nhất. Nghĩa là, với mỗi $(x_1,x_2,...,x_k),(y_1,y_2,...,y_k)\in X^k$,

$$x_1\le y_1 \Rightarrow F(x_1,x_2,...,x_k)\le F(y_1,y_2,...,y_k).$$

Gọi Φ là tập hợp tất cả các hàm liên tục $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ thỏa mãn:

(i) $\varphi(t)<t$ với $t>0$ và $\varphi(0)=0$,

(ii) $\lim\limits_{r\to t^+}\varphi(r)<t$ với $t>0$.

Trong (Paknazar *và cs.*, 2013, Định lí 2.5), cho g là ánh xạ đồng nhất, chúng tôi có được hệ quả sau. Hệ quả này chúng tôi dùng trong chứng minh Định lí 2.3.

Hệ quả 2.2. *Cho $(X,\le,d)$ là không gian mêtric thứ tự đầy đủ và $F: X^k\to X$ có tính chất I-đơn điệu mới. Giả sử tồn tại $\varphi\in\Phi$ sao cho*

$$d\left(F(x_1,x_2,...,x_k),F(y_1,y_2,...,x_k)\right)\le\varphi\left(\frac{d(x_1,y_1)+...+d(x_k,y_k)}{k}\right)$$

với mọi $x_j,y_j\,(j\in\{1,2,...,k\})$ sao cho $x_{2i-1}\le y_{2i-1}$ với mọi $i\in\left\{1,2,...,\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor\right\}$ và $x_{2i}\ge y_{2i}$ với mọi $i\in\left\{1,2,...,\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\right\}$.

Giả sử tồn tại $x_1^0,x_2^0,...,x_k^0\in X$ sao cho

$x_{2i-1}^0\le F(x_{2i-1}^0,x_{2i}^0,...,x_k^0,x_1^0,...,x_{2i-2}^0)$ *với mọi* $i\in\left\{1,2,...,\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor\right\}$,

$x_{2i}^0\ge F(x_{2i}^0,x_{2i+1}^0,...,x_k^0,x_1^0,x_2^0,...,x_{2i-1}^0)$ *với mọi* $i\in\left\{1,2,...,\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\right\}$.

Giả sử: (a) F liên tục hoặc

(b) X có tính chất sau:

(i) Nếu dãy không giảm $\{x_n\}\to x$ thì $x_n\le x$ với mọi n,

(ii) Nếu có dãy không tăng $\{y_n\}\to y$ thì $y_n\ge y$ với mọi n.

Khi đó F và g có một k-điểm bất động.

Bây giờ, chúng tôi thiết lập định lí k-điểm trùng không cần điều kiện giao hoán của F và g từ kết quả trong (Paknazar, 2013).

Định lí 2.3. *Cho $(X,\le,d)$ là không gian mêtric thứ tự đầy đủ. $F: X^k\to X$ và $g: X\to X$ là hai ánh xạ sao cho F có tính chất g-đơn điệu mới, g liên tục và $g(X)$ đầy đủ, $F(X^k)\subseteq g(X)$ và nếu $gx_n\to gx$ thì $x_n\to x$. Giả sử tồn tại $\varphi\in\Phi$ sao cho*

$$d\left(F(x_1,x_2,...,x_k),F(y_1,y_2,...,x_k)\right)\le\varphi\left(\frac{d(gx_1,gy_1)+...+d(gx_k,gy_k)}{k}\right) \tag{2.1}$$

với mọi $x_j,y_j\,(j\in\{1,2,...,k\})$ sao cho

$gx_{2i-1}\le gy_{2i-1}$ *với mọi* $i\in\left\{1,2,...,\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor\right\}$

$gx_{2i}\ge gy_{2i}$ *với mọi* $i\in\left\{1,2,...,\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\right\}$.

Giả sử tồn tại $x_1^0,x_2^0,...,x_k^0\in X$ sao cho

$gx_{2i-1}^0\le F(x_{2i-1}^0,x_{2i}^0,...,x_k^0,x_1^0,...,x_{2i-2}^0)$ *với mọi* $i\in\left\{1,2,...,\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor\right\}$,

$gx_{2i}^0\ge F(x_{2i}^0,x_{2i+1}^0,...,x_k^0,x_1^0,x_2^0,...,x_{2i-1}^0)$ *với mọi* $i\in\left\{1,2,...,\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\right\}$.

Giả sử: (a) F *liên tục hoặc*

(b) X *có tính chất sau:*

(i) *Nếu dãy không giảm* $\{x_n\} \to x$ *thì* $x_n \leq x$ *với mọi* n,

(ii) *Nếu có dãy không tăng* $\{y_n\} \to y$ *thì* $y_n \geq y$ *với mọi* n.

Khi đó F *và* g *có một* k*-điểm trùng.*

Chứng minh. Theo Mệnh đề 1.5, tồn tại $E \subseteq X$ sao cho $gE = gX$ và $g : E \to X$ là đơn ánh.

Gọi ánh xạ $G : (gE)^k \to X$ được định nghĩa như sau

$$G(gx_1,...,gx_k) = F(x_1,...,x_k) \qquad (2.2)$$

với mọi $gx_i \in gE,\ i \in \{1,2,...,k\}$.

Vì g là đơn ánh trên $g(E)$ nên ánh xạ G được xác định. Theo (2.1) và (2.2) ta có

$$d\left(G(gx_1,...,gx_k), G(gy_1,...,gy_k)\right)$$
$$= d\left(F(x_1,...,x_k), F(y_1,...,x_k)\right)$$
$$\leq \varphi\left(\frac{d(gx_1,gy_1)+...+d(gx_k,gy_k)}{k}\right)$$

với mọi $gx_j, gy_j \in gX$, $(j \in \{1,2,...,k\})$, $gx_{2i-1} \leq gy_{2i-1}$ với mọi $i \in \left\{1,2,...,\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor\right\}$ và $gx_{2i} \geq gy_{2i}$ với mọi $i \in \left\{1,2,...,\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right\}$.

Do tính chất g-đơn điệu mới của F, với $i \in \left\{1,2,...,\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor\right\}$, ta có

$gx_1 \leq gy_1 \Rightarrow F(x_1,x_2,...,x_k) \leq F(y_1,y_2,...,x_k)$.

Suy ra $G(gx_1,gx_2,...,gx_k) \leq G(gy_1,gy_2,...,gy_k)$.

Do đó G có tính chất đơn điệu mới.

Giả sử tồn tại $x_1^0, x_2^0,...,x_k^0 \in X$ sao cho

$gx_{2i-1}^0 \leq F(x_{2i-1}^0, x_{2i}^0,...,x_k^0, x_1^0,...,x_{2i-2}^0)$ với mọi $i \in \left\{1,2,...,\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor\right\}$,

$gx_{2i}^0 \geq F(x_{2i}^0, x_{2i+1}^0,...,x_k^0, x_1^0,...,x_{2i-1}^0)$ với mọi $i \in \left\{1,2,...,\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right\}$.

Điều này dẫn đến tồn tại $gx_1^0,...,gx_k^0 \in gX$ sao cho

$gx_{2i-1}^0 \leq G(gx_{2i-1}^0, gx_{2i}^0,...,gx_k^0, gx_1^0,...,gx_{2i-2}^0)$ với mọi $i \in \left\{1,2,...,\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor\right\}$,

$gx_{2i}^0 \geq G(gx_{2i}^0, gx_{2i+1}^0,...,gx_k^0, gx_1^0, gx_2^0,...,gx_{2i-1}^0)$ với mọi $i \in \left\{1,2,...,\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right\}$.

Giả sử F liên tục. Ta có chứng tỏ G liên tục. Với mỗi $\{x_n\},\{y_n\} \subset X$ sao cho $(gx_n, gy_n) \to (gx, gy)$. Ta cần chứng tỏ $G(gx_n, gy_n) \to G(gx, gy)$. Thật vậy, từ $(gx_n, gy_n) \to (gx, gy)$, theo giả thiết, ta có $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Vì F liên tục nên $F(x_n, y_n) \to F(x, y)$. Do đó $G(gx_n, gy_n) \to G(gx, gy)$. Vậy G liên tục.

Giả sử X có tính chất $(a),(b)$. Vì $gX \subseteq X$ nên gX có tính chất $(a),(b)$.

Áp dụng Hệ quả 2.2 với ánh xạ G, suy ra G có một k-điểm bất động $(u_1,u_2,...,u_k) \in (gX)^k$.

Cuối cùng, ta chứng minh F và g có một k-điểm trùng.

Từ $(u_1,u_2,...,u_k) \in (gX)^k$ là một k-điểm bất động của G. Ta có

$$u_i = G(u_i, u_{i+1},...,u_k, u_1,...,u_{i-1}). \qquad (2.3)$$

Vì $(u_1,u_2,...,u_k) \in (gE)^k$ nên tồn tại $(u_1^0,u_2^0,...,u_k^0) \in X^k$ sao cho

$$u_i = gu_i^0 \text{ với mọi } i \in \{1,2,...,k\}. \qquad (2.4)$$

Từ (2.3) và (2.4) Suy ra

$$gu_i^0 = G(gu_i^0, gu_{i+1}^0,...,gu_k^0, gu_1^0,...,gu_{i-1}^0)$$
$$= F(u_i^0, u_{i+1}^0,...,u_k^0, u_1^0,...,u_{i-1}^0)$$

với mọi $i \in \{1,2,...,k\}$

Do đó, $(u_1^0,u_2^0,...,u_k^0)$ là một k-điểm trùng F và g. □

Định lí 2.4. *Cho* $F : X^k \to X$ *và* $g : X \to X$ *sao cho tất cả các điều kiện của Định lí 2.3 thỏa mãn trừ điều kiện đầy đủ của* $g(X)$. *Cho* X *đầy* *đủ và g là toàn ánh. Khi đó F và g có một k-điểm trùng.*

Theo chứng minh Định lí 2.3, tồn tại $E \subseteq X$ sao cho $g(E) = g(X)$. Vì g là toàn ánh nên $X = g(X)$. Vậy theo Định lí 2.3 ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả 2.5. *Cho $F : X^k \to X$ và $g : X \to X$ là ánh xạ liên tục sao cho F có tính chất g-đơn điệu mới, $F(X^k) \subseteq g(X)$ và và nếu $gx_n \to gx$ thì $x_n \to x$. Giả sử tồn tại $l \in [0,1)$ sao cho*

$$d\left(F(x_1, x_2, ..., x_k), F(y_1, y_2, ..., y_k)\right)$$
$$\leq \frac{l}{k}\left(d(gx_1, gy_1) + ... + d(gx_k, gy_k)\right)$$

với mọi $x_j, y_j (j \in \{1, 2, ..., k\})$ sao cho

$gx_{2i-1} \leq gy_{2i-1}$ *với mọi* $i \in \left\{1, 2, ..., \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor\right\}$ *và*

$gx_{2i} \geq gy_{2i}$ *với mọi* $i \in \left\{1, 2, ..., \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right\}$.

Giả sử tồn tại $x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0 \in X$ sao cho $gx_{2i-1}^0 \leq F(x_{2i-1}^0, x_{2i}^0, ..., x_k^0, x_1^0, ..., x_{2i-2}^0)$ với mọi $i \in \left\{1, 2, ..., \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor\right\}$,

$gx_{2i}^0 \geq F(x_{2i}^0, x_{2i+1}^0, ..., x_k^0, x_1^0, x_2^0, ..., x_{2i-1}^0)$ với mọi $i \in \left\{1, 2, ..., \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right\}$.

Giả sử (a) F liên tục hoặc

(b) X có tính chất sau:

(i) Nếu dãy không giảm $\{x_n\} \to x$ thì $x_n \leq x$ với mọi n,

(ii) Nếu có dãy không tăng $\{y_n\} \to y$ thì $y_n \geq y$ với mọi n.

Khi đó F và g có một k-điểm trùng.

Chứng minh. Suy ra từ Định lí 2.3 bằng cách đặt $\varphi(t) = l.t$ với mọi $l \in [0,1)$.

Ví dụ 2.6. Xét trường hợp k =3. Cho $X = \mathbb{R}$, với mêtric thông thường và quan hệ thứ tự thông thường. Khi đó $(X, \leq, d)$ là không gian mêtric thứ tự. Ta định nghĩa ánh xạ $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bởi với mọi $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ và $gx = x - 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Từ $g(F(x, y, z)) = g(1) = 0 \neq 1 = F(gx, gy, gz)$ với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$, ánh xạ F và g không thỏa mãn điều kiện giao hoán. Do đó kết quả trong (Paknazar *và cs.*, 2013) không thể áp dụng được cho các hàm này.

Ta dễ dàng chứng tỏ được $F(\mathbb{R}^3) \subseteq g(\mathbb{R})$, g đơn ánh, $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ là đầy đủ, g và F liên tục và F có tính chất g-đơn điệu mới.

Hơn nữa, tồn tại $x_0 = 1$ và $y_0 = 3$, $z_0 = 1$ với $gx_0 = g1 = 0 \leq 1 = F(1,3,1) = F(x_0, y_0, z_0)$ và $gy_0 = g3 = 2 \geq 1 = F(3,1,1) = F(y_0, z_0, z_0)$ và $gz_0 = g(1) = 1 \leq 1 = F(1,1,3) = F(z_0, x_0, y_0)$. Do đó, tất cả các điều kiện của Định lí 2.3 thỏa mãn. Vì vậy, F và g có một bộ ba điểm trùng trong $\mathbb{R}^3$. Ta thấy $(2, 2, 2)$ là điểm trùng của F và g.

Tài liệu tham khảo

Bhaskar, T. G and Lakshmikantham, V. (2006). Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications. *Nonlinear Anal.*, *65*, 1379-1393.

Borcut, M and Berinde, V. (2012). Tripled coincidence theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces. *Appl. Math. Comput.*, *218*, 5929-5936.

Haghia, R. H, Rezapoura, Sh, and N. Shahzadb. (2011). Some fixedpoint generalizations are not real generalizations. *Nonlinear Anal.*, *74*, 1799-1803.

Hussain, A, Latif, A, and Shah, M. H. (2012). Coupled and tripled coincidence point results without compatibility. *Fixed Point Theory Appl.*, *2012*(77), 1-10.

Lakshmikantham, V, and Ćirić, L. (2009). Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces. *Nonlinear Anal.*, *70*, 4341-4349.

Paknazar, M, Gordji, M. E, Sen, M. D. L, and Vaezpour, S. M. (2013). N–fixed point theorem for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces. *Fixed Point Theory Appl.*, *2013*(111), 1-15.