PHÁT TRIỂN TƯ DUY SÁNG TẠO CHO HỌC SINH THÔNG QUA VIỆC KHAI THÁC CÁC BÀI TOÁN TRONG DẠY HỌC BẤT ĐẲNG THỨC

PGS. TS. TRẦN ANH TUẤN*

Một trong những biểu hiện của tư duy sáng tạo (TDST) trong dạy học toán là học sinh (HS) biết nhìn bài toán (BT) theo một khía cạnh mới, dưới nhiều góc độ, cách giải khác nhau; biết đặt ra giả thuyết khi phải lí giải một vấn đề, biết đề xuất những giải pháp khác nhau khi xử lí một tình huống; không máy móc áp dụng các quy tắc, phương pháp đã biết vào tình huống mới. Bài viết đề xuất một số biện pháp nhằm phát triển TDST cho HS thông qua việc khai thác các BT về bất đẳng thức.

1. Rèn luyện cho HS biến đổi hình thức BT để sáng tạo ra BT mới

Ví dụ 1: Cho các số thực không âm a, b, c. Chứng minh rằng: $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ (1).

Hướng dẫn: Bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số thực không âm, ta có: $(a + b) \geq 2\sqrt{ab}$; $(b + c) \geq 2\sqrt{bc}$; $(c + a) \geq 2\sqrt{ca}$.

Nhân 3 bất đẳng thức trên theo vế, ta được điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Giáo viên (GV) có thể gợi ý cho HS khai thác, biến đổi BT theo hướng sau: Vì bất đẳng thức (1) đúng với mọi số thực không âm, nên có thể thay các số thực a, b, c bởi các số và các biểu thức không âm khác nhau sẽ thu được các hình thức khác nhau của bất đẳng thức (1). Chẳng hạn:

1) Nếu thay a = sinA; b = sinB; c = sinC với A, B, C là ba góc của tam giác ABC; từ (1), suy ra: $(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \geq 8\sin A\sin B\sin C$.

Hay: $\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2} \geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Do đó, ta thu được BT sau:

BT 1: Cho tam giác *ABC*. Chứng minh rằng:

$$\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2} \geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

2) Nếu thay a = tanA; b = tanB; c = tan C với ΔABC nhọn, từ (1) ta có:

$(\tan A + \tan B)(\tan B + \tan C)(\tan C + \tan A) \geq 8\tan A\tan B\tan C$; hay $\cos A.\cos B.\cos C \leq \frac{1}{8}$. Do bất đẳng thức $\cos A.\cos B.\cos C \leq \frac{1}{8}$ cũng đúng nếu ΔABC tù hoặc vuông, nên ta có BT 2:

BT 2: Cho ΔABC. Chứng minh rằng: $\cos A.\cos B.\cos C \leq \frac{1}{8}$.

Nếu thay $x = \frac{a+b}{2}$; $y = \frac{b+c}{2}$; $z = \frac{c+a}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = x+z-y \\ b = x+y-z \\ c = y+z-x \end{cases}$ và x, y, z là độ dài ba cạnh của tam giác, khi đó (1) trở thành: $xyz \geq (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)$ (2).

Vì trong ba số x, y, z luôn tồn tại số lớn nhất, giả sử x là số lớn nhất, khi đó: $x + y - z > 0$; $z + x - y > 0$ và nếu $y + z - x < 0$ thì (2) cũng đúng. Do đó, (2) đúng với mọi x, y, z > 0. Vậy, ta có BT:

BT 3: Cho ba số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng: $xyz \geq (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)$

Từ một ví dụ cụ thể, GV có thể hướng dẫn HS nhận xét, khai thác, biến đổi các dữ kiện của BT dưới nhiều góc độ khác nhau để sáng tạo ra BT mới; qua đó, rèn luyện và bồi dưỡng một số nét đặc trưng của TDST cho HS.

2. Sử dụng phép tương tự hóa, khái quát hóa để sáng tạo BT mới

Khi giải một BT, GV có thể hướng dẫn HS xem xét các BT tương tự hay khái quát hóa BT đó. Quá trình này được rèn luyện thường xuyên sẽ góp phần bồi dưỡng TDST cho HS.

Ví dụ 2: Cho ΔABC có các cạnh a, b, c và diện tích S. Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}.S$

* Trường Cao đẳng sư phạm Nghệ An

Áp dụng định lí côsin: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ và công thức tính diện tích $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, ta có bất đẳng thức:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}.S \Leftrightarrow a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos C \geq 2\sqrt{3}ab.\sin C$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab\cos C \geq \sqrt{3}ab.\sin C$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab\cos C - \sqrt{3}ab.\sin C \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + 2ab\left[1 - \left(\frac{1}{2}\cos C + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)\right] \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + 2ab\left[1 - \cos\left(C - 60^0\right)\right] \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối: $(a-b)^2 + 2ab\left|1 - \cos(C - 60^0)\right| \geq 0$ (3) luôn đúng. Dấu "=" xảy ra khi ABC là tam giác đều.

GV hướng dẫn HS khai thác BT: Mấu chốt để giải BT ở *ví dụ 2* là dựa vào bất đẳng thức $(a-b)^2 + 2ab\left|1 - \cos(C - 60^0)\right| \geq 0$. Từ đó, GV đặt vấn đề nếu thay cos(C - 60^0) bởi côsin các góc đặc biệt thì bất đẳng thức (3) còn đúng không?

1) Nếu thay cos(C - 60^0) bằng cos(C - 30^0) thì (3) vẫn đúng. Nghĩa là: $(a-b)^2 + 2ab\left|1 - \cos(c - 30^0)\right| \geq 0$(4).

Biến đổi bất đẳng thức (4), suy ra: $(2\sqrt{3}-3)a^2 + (2\sqrt{3}-3)b^2 + 3c^2 \geq 4S\sqrt{3}$. Từ đó, ta có BT:

BT 1: a) Cho ΔABC có ba cạnh a, b, c và diện tích S. Chứng minh rằng: $(2\sqrt{3}-3)a^2 + (2\sqrt{3}-3)b^2 + 3c^2 \geq 4S\sqrt{3}$

b) Tương tự, nếu thay cos(C - 60^0) bằng cos(C - 45^0), ta có BT 2:

BT 2: Cho ΔABC có ba cạnh a, b, c và diện tích S. Chứng minh rằng: $(\sqrt{6}-\sqrt{3})a^2 + (\sqrt{6}-\sqrt{3})b^2 + \sqrt{3}c^2 \geq 4S\sqrt{3}$

2) Tương tự, nếu thay cos(C - 60^0) bằng cos(C - 120^0) hoặc cos(C - 150^0), ta lại nhận được các BT mới.

3. Rèn luyện cho HS khả năng vận dụng kết quả các BT đã giải, BT tổng quát để giải quyết BT tương tự

Một BT hay một kết quả nào đó có thể là một công cụ bắc cầu để giải quyết các BT khác. Trong quá trình dạy học toán, nếu GV quan tâm đúng mức đến khía cạnh này sẽ góp phần phát triển TDST cho HS.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng, phương trình: $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ có ba nghiệm (có thể trùng nhau) khi và chỉ khi $\left|27p + 2m^3 - 9mn\right| \leq 2\sqrt{\left(m^2 - 3n\right)^3}$ (5).

BT trên được giải quyết nhờ vào việc khảo sát sự tương giao của hàm số bậc ba với trục hoành.

Từ *ví dụ 3*, kết hợp với định lí đảo của định lí Viet, ta rút ra nhận xét: Nếu *a, b, c* là ba số thực và $m = -(a+b+c)$, $n = (ab+bc+ca)$, $p = -abc$, ta có bất đẳng thức (5).

Điều này gợi ý cho HS sáng tạo các BT bất đẳng thức cho ba số thực bất kì.

Ta xét một số trường hợp đặc biệt sau:

1) Xét *m* = 0, khi đó (5) trở thành:

$$-4n^3 - 27p^2 \geq 0 \Leftrightarrow p^2 \leq -\frac{4}{27}n^3.$$

BT 1: Cho các số thực *a, b, c* không đồng thời bằng 0, thỏa mãn: *a + b + c* = 0.

Chứng minh rằng: $\frac{13a^2b^2c^2 - 2abc - 2}{(a^2+b^2+c^2)^3} \leq \frac{1}{4}$.

Nếu đặt $n = ab + bc + ca, p = -abc$, từ (5) ta có:

$$p^2 \leq -\frac{4}{27}n^3 \Rightarrow n^3 \leq -\frac{27}{4}p^2.$$

Do đó: $13p^2 + 2p - 2 + 2n^3 \leq 13p^2 + 2p - 2 - \frac{27}{2}p^2 = -\left(\frac{1}{2}p - 1\right)^2 \leq 0.$

Suy ra: $13p^2 + 2p - 2 \leq -2n^3 \Leftrightarrow 13a^2b^2c^2 - 2ab -$

$2 \leq -2(ab + bc + ca)^3$

Mà: $(a+b+c)^2 = 0 \Rightarrow ab + bc + ca = -\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$,

dẫn tới: $13a^2b^2c^2 - 2abc - 2 \leq \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^3 \Rightarrow$

$$\frac{13a^2b^2c^2 - 2abc - 2}{(a^2+b^2+c^2)^3} \leq \frac{1}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi *a, b, c* = (1,1,-2) và các hoán vị.

2) Xét *n* = *km*^{2}, khi đó (5) trở thành:

$$\left|27p + (2-9k)m^3\right| \leq 2\left|m^3\right|\sqrt{(1-3k)^3}.$$ Ta có:

BT 2: Cho các số thực *a, b, c* thỏa mãn: $2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 5(ab + bc + ca)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{27}(a+b+c)^2 + \sqrt[3]{abc+1} \geq 0.$$

Gợi ý cách giải: Đặt $m = -(a+b+c), n = ab + bc + ca, p = -abc$. Từ giả thiết, suy ra: $2\left(m^2 - 2n\right) = 5n \Rightarrow n = \frac{2}{9}m^2$. Từ (5), suy ra:

$$|27p| \le 2\sqrt{\frac{m^6}{27}} \Rightarrow 27^3.p^2 \le 4m^6 \Rightarrow 27\sqrt[3]{\frac{p^2}{4}} \le m^2.$$

Do đó: $\frac{1}{27}(a+b+c)^2 \ge \sqrt[3]{\frac{p^2}{4}}$. Ta cần chứng minh: $\sqrt[3]{\frac{p^2}{4}} \ge \sqrt[3]{p-1} \Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}-1\right)^2 \ge 0$ (luôn đúng).

3) Xét $m^2 - 3n = c$, c là hằng số cho trước.

BT 3: Cho các số thực *a, b, c* thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca+4$. Chứng minh rằng:

$$18(ab+bc+ca)^2 - (ab+bc+ca)(a+b+c-48) + 9abc \ge -\frac{1}{3}\left(\frac{6}{\sqrt[3]{3}}+112\right).$$

Gợi ý cách giải:

Đặt $m = -(a+b+c)$, $n = ab+bc+ca$, $p = -abc$. Từ giả thiết, suy ra:

$$(a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ca)+4 \Rightarrow m^2 = 3n+4.$$

Từ (5): $|27p - 3mn + 8m| \le 16 \Rightarrow mn - 9p \ge \frac{8m-16}{3}$

Mặt khác: $VT = 18(ab+bc+ca)^2 + 48(ab+bc+ca) - (ab+bc+ca)(a+b+c) + 9abc$

$$= 2[3(ab+bc+ca)+4]^2 - (ab+bc+ca)(a+b+c) + 9abc - 32$$
$$= 2(a+b+c)^4 - (ab+bc+ca)(a+b+c) + 9abc - 32$$
$$= 2m^4 + mn - 9p - 32 \ge 2m^4 + \frac{8m-16}{3} - 32 = \frac{1}{3}(6m^4 + 8m - 112).$$

Xét hàm số $f(m) = 6m^4 + 8m - 112$, có:

$$f'(m) = 24m^3 + 8 \Rightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Suy ra: $f(m) \ge f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = -\frac{6}{\sqrt[3]{3}} - 112$. Nên $VT \ge -\frac{1}{3}\left(\frac{6}{\sqrt[3]{3}}+112\right)$.

BT 4: Cho các số thực *a, b, c* thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca+1$. Chứng minh rằng: $(a+b+c)^2 \le 4 + 3(ab+bc+ca)^2 + 18dbc$.

Gợi ý cách giải:

Đặt: $m = -(a+b+c)$, $n = ab+bc+ca$, $p = -abc$. Từ giả thiết, ta suy ra: $(a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ca)+1 \Rightarrow m^2 = 3n+1$. Từ (5), suy ra: $|27p - m^3 + 3m| \le 2 \Rightarrow 27p \le m^3 - 3m + 2$.

Ta có, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $m^2 \le 4 + 3n^2 - 18p \Leftrightarrow 3m^2 - 9n^2 + 54p - 12 \le 0$.

Mặt khác: $3m^2 - 9n^2 + 54p \le 3m^2 - (m^2-1)^2 + 2(m^3 - 3m + 2)$
$= -m^4 + 2m^3 + 5m^2 - 6m + 3 = -(m^2 - m - 3)^2 + 12 \le 12$.
Từ đây, ta có được điều cần chứng minh.

* * *

Các ví dụ trên cho thấy, việc khai thác các BT đòi hỏi HS phải có sự nhanh nhạy, linh hoạt và có sự liên tưởng đến những kiến thức đã học. Khi xét BT dưới nhiều góc độ khác nhau HS sẽ có được cái nhìn tổng quan về BT đó. Để phát triển TDST cho HS, theo chúng tôi, GV cần giúp HS: - Phát triển tư duy trừu tượng trong quá trình dạy học toán; - Rèn luyện kĩ năng quan sát, xem xét các BT dưới nhiều góc độ khác nhau; - Giúp các em liên kết các vấn đề theo thứ tự logic khi giải một BT nào đó; - Phân tích các đặc điểm, thuộc tính của đối tượng; biết đặt ra giả thuyết khi phải lí giải một vấn đề, đề xuất những giải pháp khác nhau khi xử lí một tình huống; không máy móc áp dụng các quy tắc, phương pháp đã biết vào tình huống mới. ❑

Tài liệu tham khảo

1. Hoàng Chúng. **Rèn luyện khả năng sáng tạo toán học ở trường phổ thông.** NXB *Giáo dục*, H. 1969.
2. G. Polya. **Sáng tạo Toán học.** NXB *Giáo dục*, H. 1978.
3. Nguyễn Bá Kim. **Phương pháp dạy học môn Toán.** NXB *Đại học sư phạm*, H. 2007.
3. Nguyễn Cảnh Toàn. **Phương pháp luận duy vật biện chứng với việc học, dạy, nghiên cứu Toán học.** NXB *Đại học quốc gia*, H. 1997.

SUMMARY

The development of creative thinking for students through teaching Mathematics is the concern of many teachers and researchers in the field of mathematics theoretical teaching. In this article, we mention an approach to develop creative thinking for students through the exploration and development of inequality problems in high schools.