Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ

Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên

website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jsi.2020.089

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU VÀ ĐỐI NGẪU CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA TRỊ SỬ DỤNG ĐẠO HÀM ĐA TRỊ CLARKE THEO HƯỚNG NÓN

Lê Thanh Tùng[1], Trần Thiện Khải[2*], Phạm Thanh Hùng[3] và Phạm Lê Bạch Ngọc[3]

[1]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*
[2]*Trung tâm Đào tạo và Hợp tác Doanh nghiệp, Trường Đại học Trà Vinh*
[3]*Khoa Sư phạm và Xã hội Nhân văn, Trường Đại học Kiên Giang*
**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Trần Thiện Khải (email: khai@tvu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 04/03/2020
Ngày nhận bài sửa: 19/03/2020
Ngày duyệt đăng: 29/06/2020

Title:
Optimality conditions and duality for set-valued optimization in terms of cone-directed Clarke derivatives

Từ khóa:
Bài toán tối ưu đa trị, các điều kiện tối ưu, đạo hàm Clarke theo hướng nón, đối ngẫu Mond-Weir, đối ngẫu Wolfe

Keywords:
Cone-directed Clarke derivatives, Mond-Weir duality, Optimality conditions, Set-valued optimization, Wolfe duality

ABSTRACT

This paper is to deal with Mond-Weir duality and Wolfe duality for constrained set-valued optimization problems in terms of cone-directed Clarke derivatives. Firstly, necessary and sufficient optimality conditions for constrained set-valued optimizations in terms of cone-directed Clarke derivatives for the cone-semilocally convex like maps are investigated. Then, the Mond-Weir duality and Wolfe duality for a constrained set-valued optimization and their weak duality, strong duality and converse duality are considered.

TÓM TẮT

Bài báo này khảo sát bài toán đối ngẫu dạng Mond-Weir và Wolfe cho bài toán tối ưu đa trị có ràng buộc sử dụng đạo hàm đa trị Clarke theo hướng nón. Trước hết, điều kiện tối ưu cần và đủ cho bài toán tối ưu đa trị có ràng buộc sử dụng đạo hàm đa trị Clarke theo hướng nón cho lớp hàm tựa lồi nửa địa phương được khảo sát. Sau đó, bài toán đối ngẫu dạng Mond-Weir và Wolfe cho bài toán tối ưu đa trị có ràng buộc và các tính chất về đối ngẫu mạnh, đối ngẫu yếu và đối ngẫu ngược được trình bày.

Trích dẫn: Lê Thanh Tùng, Trần Thiện Khải, Phạm Thanh Hùng và Phạm Lê Bạch Ngọc, 2020. Điều kiện tối ưu và đối ngẫu cho bài toán tối ưu đa trị sử dụng đạo hàm đa trị Clarke theo hướng nón. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 56(Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên)(1): 17-27.

1 MỞ ĐẦU

Việc xét bài toán đối ngẫu của các dạng bài toán tối ưu khác nhau và các liên hệ giữa các dạng nghiệm của chúng là một trong các chủ đề quan trọng trong lý thuyết tối ưu và được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây, chẳng hạn Sach and Craven (1991), Chen *et al.* (2009), Tung (2017), Tung *et al.* (2019). Khi xét bài toán đối ngẫu cho các bài toán tối ưu đa trị, nhiều loại đạo hàm đa trị khác nhau đã được sử dụng. Trong công trình của Anh (2016), epi-đạo hàm theo tia cấp cao được sử dụng để khảo sát bài toán đối ngẫu hỗn hợp của bài toán tối ưu đa trị. Đạo hàm contingent cấp cao được sử dụng trong công trình của Li *et al.* (2008) để khảo sát bài toán đối ngẫu dạng Mond-Weir cấp cao của bài toán tối ưu đa trị. Đạo hàm contingent cấp cao yếu được sử dụng để khảo sát bài toán đối ngẫu dạng Mond-Weir và Wolfe cấp cao của bài toán tối ưu đa trị trong công trình của Chen *et al.* (2009). Bài báo của Yu and Kong (2016) sử dụng đạo hàm theo tia cấp cao để xét bài toán đối ngẫu dạng Mond-Weir và dạng Wolfe.

Nón tiếp tuyến Clarke (Clarke, 1983), mặc dù chứa trong nón contingent và nón theo tia radial, nhưng là một nón lồi nên có thể áp dụng để xây dựng các điều kiện tối ưu dạng đối ngẫu trong đó có sử dụng Định lý tách tập lồi như trong các công trình của Corley (1988), Lalitha and Arora (2008), Lalitha and Arora (2009). Qua tham khảo các tài liệu liên quan về chủ đề đối ngẫu có thể thấy rằng chưa có bài báo nào sử dụng các dạng đạo hàm đa trị Clarke để khảo sát bài toán đối ngẫu của bài toán tối ưu đa trị. Từ những quan sát trên, trong bài báo này đạo hàm đa trị Clarke đã được sử dụng theo hướng nón để khảo sát bài toán đối ngẫu dạng Mond-Weir và bài toán đối ngẫu dạng Wolfe của bài toán tối ưu đa trị.

2 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này nếu không giả thiết gì thêm, xét X, Y, Z là các không gian định chuẩn thực, $K \subseteq Y,\ D \subseteq Z$ là các nón lồi đóng có đỉnh với phần trong khác rỗng. Với $A \subseteq X$, $\operatorname{int} A$, $\operatorname{cl} A$, ∂A kí hiệu tương ứng cho phần trong, bao đóng, biên của A. X^* là không gian đối ngẫu của X và $\langle x^*, x\rangle$ là giá trị của ánh xạ tuyến tính liên tục $x^* \in X^*$ tại $x \in X$ và B_X, B_Y là hình cầu đơn vị đóng trong X, Y. Với $x_0 \in X$, $\mathcal{U}(x_0)$ là tập các lân cận của x_0. Với $A \subseteq X$, $u \in X$, các nón sau thường được dùng

$$\operatorname{cone} A := \{\lambda a \mid \lambda \geq 0,\ a \in A\},$$

$$\operatorname{cone}_+ A := \{\lambda a \mid \lambda > 0,\ a \in A\},$$

$$A(u) = \operatorname{cone}(A + u).$$

Ký hiệu

$$K^+ := \{k^* \in Y^* \mid \langle k^*, y\rangle \geq 0,\ \forall y \in K\},$$

$$D^+ := \{d^* \in Z^* \mid \langle d^*, z\rangle \geq 0,\ \forall z \in D\}$$

lần lượt là nón đối ngẫu của K và D.

Với $A \subseteq Y$, *nón contingent* $T(A, \bar{y})$ của A tại $\bar{y} \in \operatorname{cl} A$ được định nghĩa như sau:

$$T(A, \bar{y}) := \{h \in Y \mid \exists t_n \downarrow 0, \exists h_n \to h : \bar{y} + t_n h_n \in A, \forall n\}$$

Dễ dàng kiểm tra được, định nghĩa trên tương đương với

$$T(A, \bar{y}) := \{h \in Y \mid \exists \alpha_n > 0, \exists y_n \in A : y_n \to \bar{y}, \alpha_n (y_n - \bar{y}) \to h\}.$$

Nón tiếp tuyến Clarke $T^C(A, \bar{y})$ của A tại $\bar{y} \in \operatorname{cl} A$ được cho như sau:

$$T^C(A, \bar{y}) := \{h \in Y \mid \forall y_n \to \bar{y}, \forall t_n \downarrow 0, \exists h_n \to h : y_n + t_n h_n \in A, \forall n\}.$$

Nhận xét 2.1. (Khan *et al*, 2016, trang 127)

(i) $T^C(A, \bar{y}) \subseteq T(A, \bar{y})$.

(ii) $T^C(A, \bar{y})$ là nón lồi và $0 \in T^C(A, \bar{y})$.

Định nghĩa 2.1. Cho $\bar{a} \in A \subseteq Y$.

(i) $\bar{a}$ được gọi là điểm cực tiểu địa phương (Pareto) của A đối với K, và ký hiệu là $\bar{a} \in \operatorname{Min}_K A$ nếu và chỉ nếu tồn tại $U \in \mathcal{U}(\bar{a})$ sao cho

$$(A \cap U - \bar{a}) \cap (-K \setminus \{0\}) = \varnothing.$$

(ii) $\bar{a}$ được gọi là điểm cực tiểu địa phương yếu của A đối với K, và ký hiệu là $\bar{a} \in \operatorname{WMin}_K A$ nếu và chỉ nếu tồn tại $U \in \mathcal{U}(\bar{a})$ sao cho

$$(A \cap U - \bar{a}) \cap (-\operatorname{int} K) = \varnothing.$$

(iii) $\bar{a}$ được gọi là điểm cực đại địa phương (Pareto) của A đối với K, và ký hiệu là $\bar{a} \in \operatorname{Max}_K A$, nếu và chỉ nếu tồn tại $U \in \mathcal{U}(\bar{a})$ sao cho

$$(A \cap U - \bar{a}) \cap (K \setminus \{0\}) = \varnothing.$$

(iv) $\bar{a}$ được gọi là điểm cực đại địa phương yếu của A đối với K, và ký hiệu là $\bar{a} \in \operatorname{WMax}_K A$ nếu và chỉ nếu tồn tại $U \in \mathcal{U}(\bar{a})$ sao cho

$$(A \cap U - \bar{a}) \cap \operatorname{int} K = \varnothing.$$

Nếu $U = Y$, cụm từ "địa phương" sẽ được lược bỏ, nghĩa là khái niệm toàn cục tương ứng được khảo sát.

Với ánh xạ đa trị $H : X \to 2^Y$, tập xác định, đồ thị, trên đồ thị của H được định nghĩa như sau:

$$\operatorname{dom} H := \{x \in X \mid H(x) \neq \varnothing\},$$

$$\operatorname{gr} H := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in H(x)\},$$

$$\operatorname{epi} H := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in H(x) + K\}.$$

Ánh xạ profile của H, kí hiệu H_+, định nghĩa bởi $H_+(x) := H(x) + K$.

Định nghĩa 2.2. Cho $H : X \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị, $(x, y) \in \operatorname{gr} H$.

(i) (Aubin and Frankowska, 1990) Đạo hàm contingent $DH(x, y)$ của H tại $(x, y) \in \operatorname{gr} H$ là ánh xạ đa trị từ X vào Y thỏa $\operatorname{gr} DH(x, y) = T(\operatorname{gr} H, (x, y))$, nghĩa là

$$DH(x, y)(u) := \{v \in Y \mid (u, v) \in T(\operatorname{gr} H, (x, y))\},$$

với mọi $u \in X$.

(ii) (Jahn, 2009) Đạo hàm contingent của H theo hướng nón K là đạo hàm contingent của $H + K$ tại $(x, y) \in \operatorname{gr} H \subset \operatorname{epi} H$, nghĩa là ánh xạ đa trị từ X vào Y thỏa

$$\operatorname{gr} DH_+(x, y) = T(\operatorname{grH}_+, (x, y)) = T(\operatorname{epi} H, (x, y)),$$

hay

$$DH_+(x, y)(u) := \{v \in Y \mid (u, v) \in T(\operatorname{epi} H, (x, y))\},$$

với mọi $u \in X$.

Định nghĩa 2.3. Cho $H : X \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị, $(x, y) \in \operatorname{gr} H$.

(i) (Aubin and Frankowska, 1990) Đạo hàm Clarke $D^C H(x, y)$ của H tại $(x, y) \in \operatorname{gr} H$ là ánh xạ đa trị từ X vào Y thỏa $\operatorname{gr} DH(x, y) = T^C(\operatorname{gr} H, (x, y))$, nghĩa là

$$D^C H(x, y)(u) := \{v \in Y \mid (u, v) \in T^C(\operatorname{gr} H, (x, y))\},$$

với mọi $u \in X$.

(ii) (Sach and Craven, 1991) Đạo hàm Clarke của H theo hướng nón K là đạo hàm Clarke của $H + K$ tại $(x, y) \in \operatorname{gr} H \subset \operatorname{epi} H$, nghĩa là ánh xạ đa trị từ X vào Y thỏa

$$\operatorname{gr} D^C H_+(x, y) = T^C(\operatorname{gr} H_+, (x, y)) = T^C(\operatorname{epi} H, (x, y)),$$

hay

$$D^C H_+(x, y)(u) := \{v \in Y \mid (u, v) \in T^C(\operatorname{epi} H, (x, y))\},$$

với mọi $u \in X$.

3 ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU SỬ DỤNG ĐẠO HÀM THEO HƯỚNG NÓN CLARKE

Cho X, Y, Z là các không gian định chuẩn thực, $K \subseteq Y$, $D \subseteq Z$ là các nón lồi đóng có đỉnh với phần trong khác rỗng và $F : X \to 2^Y, G : X \to 2^Z$ là 2 ánh xạ đa trị.

Xét bài toán tối ưu đa trị dạng tổng quát như sau:

$$(\text{WSOP}) \qquad \begin{cases} \operatorname{WMin}_K F(x) \\ G(x) \cap (-D) \neq \varnothing \end{cases}$$

nghĩa là tìm tất cả các giá trị $x_0 \in A$ mà tồn tại $y_0 \in F(x_0)$ sao cho $y_0 \in \operatorname{WMin}_K F(A)$, trong đó $A := \{x \in X \mid G(x) \cap (-D) \neq \varnothing\}$.

Tập các điểm chấp nhận được của bài toán (WSOP) ký hiệu là

$$\Omega := \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in A, y \in F(x)\}.$$

Điểm $(x_0, y_0) \in \Omega$ là nghiệm địa phương của bài toán (WSOP) nếu tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $(F(A \cap U) - y_0) \cap (-\operatorname{int} K) = \varnothing$. Trong phần này, để đơn giản trong cách trình bày, giả sử rằng $dom[D^C(F, G)_+(x_0, y_0, z_0)] = X$.

Mệnh đề 3.1. (Điều kiện cần dạng Fritz-John)

Nếu (x_0, y_0) là một nghiệm của (WSOP) thì tồn tại

$$(k^*, d^*) \in K^+ \times D^+ \setminus \{(0_{Y^*}, 0_{Z^*})\}$$

sao cho với mọi $(y, z) \in D^C(F, G)_+(x_0, y_0, z_0)(X)$,

$\langle k^*, y\rangle + \langle d^*, z\rangle \geq 0$ *và* $\langle d^*, z_0\rangle = 0$.

Chứng minh. Lấy $z_0 \in G(x_0) \cap -D$, ta đặt

$$B := \left[\bigcup_{x\in X} D^C(F,G)_+(x_0, y_0, z_0)(x)\right] + (0_Y, z_0).$$

Trước hết, chứng minh rằng B là tập lồi bằng cách chứng minh $B_1 = B - (0_Y, z_0)$ lồi. Lấy $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in B_1$. Khi đó, tồn tại $x_1, x_2 \in \Omega$ sao cho

$$(y_i, z_i) \in D^C(F,G)_+(x_0, y_0, z_0)(x_i), \quad i = 1,2,$$

nghĩa là

$$(x_i, y_i, z_i) \in T^C(\mathrm{epi}(F,G), (x_0, y_0, z_0)), \quad i = 1,2.$$

Nhưng do $T^C(\mathrm{epi}(F,G), (x_0, y_0, z_0))$ là nón lồi, tham khảo sách chuyên khảo của Aubin and Frankowska (1990), ta có

$$\lambda(x_1, y_1, z_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2, z_2) \in T^C(\mathrm{epi}(F,G), (x_0, y_0, z_0))$$

với mọi $\lambda \in [0, 1]$. Nên

$$\begin{aligned}&(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2, \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2)\\ &\in D^C(F,G)_+(x_0, y_0, z_0)(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2),\end{aligned}$$

với mọi $\lambda \in [0, 1]$. Do đó, $\lambda(y_1, z_1) + (1-\lambda)(y_2, z_2) \in B_1$, nên B_1 và B lồi.

Tiếp theo, chứng minh $B \cap [-\mathrm{int}\,K \times -\mathrm{int}\,D] = \varnothing$. Giả thiết phản chứng tồn tại $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ sao cho

$$\begin{aligned}(\hat{y}, \hat{z} + z_0) &\in \left[D^C(F,G)_+(x_0, y_0, z_0)(\hat{x}) + (0_Y, z_0)\right]\\ &\cap [-\mathrm{int}\,K \times -\mathrm{int}\,D],\end{aligned} \tag{1}$$

nghĩa là,

$$\begin{aligned}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &\in T^C[\mathrm{epi}(F,G), (x_0, y_0, z_0)]\\ &\subset T[\mathrm{epi}(F,G), (x_0, y_0, z_0)]\end{aligned}$$

Khi đó, tồn tại dãy $(x_n, y_n, z_n) \in \mathrm{epi}(F,G)$, nghĩa là $x_n \in X,\ \ y_n \in F(x_n) + K,\ \ z_n \in G(x_n) + D,$

$$(x_n, y_n, z_n) \to (x_0, y_0, z_0)$$

và dãy $\alpha_n > 0$ sao cho

$$\alpha_n(x_n - x_0,\ y_n - y_0,\ z_n - z_0) \to (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}).$$

Từ (1), ta có $\hat{y} \in -\mathrm{int}\,K$. Do $\alpha_n(y_n - y_0) \to \hat{y} \in -\mathrm{int}\,K$ mở, tồn tại N_1 sao cho

$$\alpha_n(y_n - y_0) \in -\mathrm{int}\,K, \text{ với } n \geq N_1,$$

và do $\alpha_n > 0$ và K là một nón nên

$$y_n - y_0 \in -\mathrm{int}\,K, \text{ với } n \geq N_1. \tag{2}$$

Tương tự, do D là một nón, $z + z_0 \in -\mathrm{int}\,D$ và $\alpha_n(z_n - z_0) + z_0 \to \hat{z} + z_0$, suy ra tồn tại N_2

$$\alpha_n(z_n - z_0) + z_0 \in -\mathrm{int}\,D \text{ với mọi } n \geq N_2. \tag{3}$$

Hơn nữa, tồn tại $N \geq \max(N_1, N_2)$ sao cho $\alpha_N > 1$. Nếu ngược lại, nghĩa là $\alpha_n \leq 1$ với mọi n đủ lớn, thì do $y_n \to y_0$ và $0 \leq |\alpha_n(y_n - y_0)| \leq |y_n - y_0|$ nên $\alpha_n(y_n - y_0) \to 0_Y$, mâu thuẫn với $\hat{y} \in -\mathrm{int}\,K$.

Từ (3) ta có

$$\alpha_N(z_N - z_0) + z_0 = \alpha_N[z_N - (1 - 1/\alpha_N)z_0] \in -\mathrm{int}\,D,$$

và do đó $z_N - (1 - 1/\alpha_N)z_0 \in -\mathrm{int}\,D.$ Nhưng $z_0 \in -D$ và $1 - 1/\alpha_N > 0$, vì $\alpha_N > 1$ nên $(1 - 1/\alpha_N)z_0 \in -D$. Do đó,

$$\begin{aligned}z_N &= (z_N - (1 - 1/\alpha_N)z_0) + (1 - 1/\alpha_N)z_0\\ &\in -\mathrm{int}\,D - D \subset -\mathrm{int}\,D.\end{aligned} \tag{4}$$

Mặt khác, do $y_N \in F(x_N) + K,\ \ z_N \in G(x_N) + D$, tồn tại $\hat{y}_N \in F(x_N),\ k_N \in K,\ \ \hat{z}_N \in G(x_N)$ và $d_N \in D$ sao cho $y_N = \hat{y}_N + k_N,\ z_N = \hat{z}_N + d_N$. Từ (2) và (4), ta có

$$\hat{y}_N - y_0 = (y_N - y_0) - k_N \in -\mathrm{int}\,K - K \subset -\mathrm{int}\,K,$$

$$\hat{z}_N = z_N - d_N \in -\mathrm{int}\,D - D \subset -\mathrm{int}\,D.$$

Do đó, chúng ta chỉ ra sự tồn tại $x_N \in X,\ \hat{z}_N \in G(x_N) \cap -D,\ \hat{y}_N \in F(x_N)$ sao cho $\hat{y}_N - y_0 \in -\mathrm{int}\,K$. Điều này dẫn đến mâu thuẫn với giả thiết (x_0, y_0) là một nghiệm của (WSOP). Do đó, $B \cap [-\mathrm{int}\,K \times -\mathrm{int}\,D] = \varnothing.$

Tiếp theo, sử dụng Định lý tách để tách B và $-\operatorname{int} K \times -\operatorname{int} D$. Theo định lý tách Eidelhei, tham khảo trang 74 sách chuyên khảo của Jahn (2009), tồn tại $k^* \in Y^*, d^* \in Z^*$ không đồng thời là hàm không, và số thực ξ sao cho:

$$\langle k^*, y\rangle + \langle d^*, z\rangle \geq \xi, \quad \forall (y,z) \in B,$$

$$\langle k^*, y\rangle + \langle d^*, z\rangle < \xi, \quad \forall (y,z) \in -\operatorname{int} K \times -\operatorname{int} D. \quad (5)$$

Nhưng do $(y, z) \in -\operatorname{int} K \times -\operatorname{int} D$ có thể được lấy tùy ý gần với $(0_Y, 0_Z)$ và tính liên tục của k^*, d^* từ (5) thì $\xi \geq 0$.

Tuy nhiên, nếu giả sử rằng $\xi > \langle k^*, \overline{y}\rangle + \langle d^*, \overline{z}\rangle > 0$ với một $(\overline{y}, \overline{z}) \in -\operatorname{int} K \times -\operatorname{int} D$.

Khi đó, $\langle k^*, \beta\overline{y}\rangle + \langle d^*, \beta\overline{z}\rangle > \xi$, với $\beta > \dfrac{\xi}{\langle k^*, \overline{y}\rangle + \langle d^*, \overline{z}\rangle} > 0$ đủ lớn, trong khi $(\beta\overline{y}, \beta\overline{z}) \in -\operatorname{int} K \times -\operatorname{int} D$, mâu thuẫn với (5). Điều này cho thấy rằng ξ phải bằng 0, nghĩa là

$$\langle k^*, y\rangle + \langle d^*, z\rangle \geq 0, \quad \forall (y,z) \in B, \quad (6)$$

$$\langle k^*, y\rangle + \langle d^*, z\rangle < 0, \quad \forall (y,z) \in -\operatorname{int} K \times -\operatorname{int} D. \quad (7)$$

Từ (7), bằng cách lấy $y \in -\operatorname{int} K$ tùy ý gần với 0_Y, theo tính liên tục của k^*, dẫn đến kết luận $\langle d^*, z\rangle \geq 0, \forall z \in \operatorname{int} D$. Do đó, $\langle d^*, z\rangle \geq 0, \forall z \in \operatorname{cl}(\operatorname{int} D) \supseteq D$, nên $d^* \in D^+$. Tương tự có thể chứng minh được $k^* \in K^+$.

Để chứng minh $\langle d^*, z_0\rangle = 0$, trước hết ta có $\langle d^*, z_0\rangle \geq 0$; từ (6) và $(0_Y, z_0) \in B$ theo Nhận xét 2.1. Nhưng $z_0 \in -D$ và $d^* \in D^+$ nên $\langle d^*, z_0\rangle \leq 0$. Do vậy, $\langle d^*, z_0\rangle = 0$.

Cuối cùng, mệnh đề $\langle k^*, y\rangle + \langle d^*, z\rangle \geq 0$ với mọi $x \in X$ thỏa. Thật vậy, với $x \in X$, do $D^C(F,G)_+(x_0, y_0, z_0)(x) + (0_Y, z_0) \subset B$, từ (6), $\langle k^*, y\rangle + \langle d^*, z + z_0\rangle \geq 0$. Nhưng do $\langle d^*, z_0\rangle = 0$ dẫn đến $\langle k^*, y\rangle + \langle d^*, z\rangle \geq 0$.

Tiếp theo, điều kiện cần tối ưu dạng KKT cho bài toán (WSOP) được thiết lập sử dụng định tính ràng buộc Slater và điều kiện tính tựa lồi nửa địa phương.

Định nghĩa 3.1. (i) Tập $S \subseteq X$ được gọi là dạng hình sao địa phương tại điểm $x_0 \in S$ nếu với bất kỳ $x \in S$, tồn tại một số thực dương $a(x, x_0) \leq 1$ sao cho $(1-\lambda)x_0 + \lambda x \in S$ với $0 \leq \lambda \leq a(x, x_0)$. Nếu S có dạng hình sao địa phương tại mỗi $x \in S$, S được gọi là tập hình sao địa phương.

(ii) Nếu S là tập hình sao địa phương, khi đó ánh xạ đa trị $H : S \subseteq X \to 2^Y$ được gọi là K-tựa lồi nửa địa phương, tham khảo trong công trình của Arora and Lalitha (2005), tại điểm $x_0 \in S$ nếu với mọi $x \in S, y \in H(x)$ và $y_0 \in H(x_0)$ thì tồn tại một số thực dương $d((x,y),(x_0,y_0)) \leq a(x, x_0)$ sao cho

$(1-\lambda)y_0 + \lambda y \in H(S) + K$ với $0 \leq \lambda \leq d((x,y),(x_0,y_0))$.

Ánh xạ H được gọi là K-tựa lồi nửa địa phương trên S nếu H là K-tựa lồi nửa địa phương tại mỗi $x \in S$. Nếu H là K-tựa lồi nửa địa phương trên S với $a(x, x_0) = 1$ và $d((x,y),(x_0,y_0)) = 1$ với mọi $x_0, x \in S$, $y \in H(x)$ và $y_0 \in H(x_0)$, H là K-lồi trên S.

Ví dụ 3.1. Tập $S =]0,2[\cup]3,5[$ là tập hình sao địa phương trên $\mathbb{R}$ nhưng không phải là tập lồi trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3.2. (Lalitha and Arora, 2008) Nếu $K = \mathbb{R}^2_+$ thì ánh xạ đa trị $H : S \to 2^Y$ là K-tựa lồi nửa địa phương trên S, trong đó $S = [0, 1]$ và

$$H(x) = \begin{cases} \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid y_1 y_2 > 1\}, & \text{khi } x \in [0, 1[\\ \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 > 2\}, & \text{khi } x = 1. \end{cases}$$

Tuy nhiên, H không là K-lồi, vì với $x = 0$, $x_0 = 1$, $y = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$, $y_0 = \left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{7}{3}\right) \in H(x_0)$ và $\lambda = \dfrac{1}{2}$, $(1-\lambda)y_0 + \lambda y = \left(0, \dfrac{11}{6}\right) \notin H(S) + K$.

Mệnh đề 3.2. *Cho* $H : S \subseteq X \to 2^Y$ *là ánh xạ đa trị* $(x_0, y_0) \in \mathrm{gr}H$. *Nếu H là K-tựa lồi nửa địa phương xác định trên tập hình sao S và* $D^C H_+(x_0, y_0)(x)$ *tồn tại với mỗi* $x \in S$ *thì*

$$H(x) - y_0 \subseteq D^C H_+(x_0, y_0)(x - x_0),\ \forall x \in S.$$

Chứng minh. Với $x \in S$ và $y \in H(x)$, cần chứng minh $y - y_0 \in D^C H_+(x_0,\ y_0)(x - x_0)$, nghĩa là $(x - x_0,\ y - y_0) \in T^C(\mathrm{epi}\, H, (x_0,\ y_0))$.

Lấy $(\bar{x}_n,\ \bar{y}_n) \to (x_0,\ y_0)$ với $(\bar{x}_n,\ \bar{y}_n) \in \mathrm{epi}\, H$ và $t_n \to \infty$ với $t_n > 0$. Do S là tập hình sao địa phương nên tồn tại một số thực $a(x,\ \bar{x}_n) \le 1$ sao cho $(1-\lambda)\bar{x}_n + \lambda x \in X$ với $0 \le \lambda \le a(x,\ \bar{x}_n)$. Rõ ràng là $y \in H(x) \subseteq H(S) + K$ và

$$\bar{y}_n \in H(\bar{x}_n) + K \subseteq H(S) + K$$

do $(\bar{x}_n,\ \bar{y}_n) \in \mathrm{epi}\, H$. Tập $H(S) + K$ là tập hình sao địa phương vì H là ánh xạ đa trị K -tựa lồi nửa địa phương, và do đó tồn tại một số thực dương $b(y,\ \bar{y}_n) \le 1$ sao cho $(1-\lambda)\bar{y}_n + \lambda y \in H(S) + K$ với $0 \le \lambda \le b(y,\ \bar{y}_n)$. Với mỗi n xác định $c(x,\ y,\ \bar{x}_n,\ \bar{y}_n) = \min\{a(x,\ \bar{x}_n), b(y,\ \bar{y}_n)\}$. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử rằng $0 < 1/t_n \le c(x,\ y,\ \bar{x}_n,\ \bar{y}_n)$ với mỗi n. Đặt

$$x_n = (1 - 1/t_n)\bar{x}_n + (1/t_n)x$$

và $$y_n = (1 - 1/t_n)\bar{y}_n + (1/t_n)y,$$

với $0 < 1/t_n < c(x,\ y,\ \bar{x}_n,\ \bar{y}_n)$. Do đó, với mỗi n, ta có $x_n \in S,\ y_n \in H(x_n) + K$, $\{x_n\} \to x_0$, $\{y_n\} \to y_0$. Điều này kéo theo $(x_n,\ y_n) \in \mathrm{epi}\, H$, $(x,\ y) \to (x_0,\ y_0)$ và $t_n\{(x_n,\ y_n) - (\bar{x}_n,\ \bar{y}_n)\} \to (x - x_0,\ y - y_0)$.

Định nghĩa 3.2. (Lalitha and Arora, 2008) Bài toán (WSOP) thỏa mãn định tính ràng buộc Slater dạng tổng quát nếu tồn tại $x' \in X$ sao cho $G(x') \cap (-\mathrm{int}\, D) \ne \varnothing$.

Mệnh đề 3.3. (Điều kiện cần dạng Karush-Kuhn-Tucker)

Giả sử $(F,\ G) : X \to 2^Y \times 2^Z$ là ánh xạ đa trị $(K \times D)$ -tựa lồi nửa địa phương xác định trên tập hình sao S, trong đó $A = \{x \in X \mid G(x) \cap (-D) \ne \varnothing\} \subseteq S$ và S là tập con của X và (WSOP) thỏa định tính ràng buộc Slater dạng tổng quát. Nếu $(x_0,\ y_0)$ là một nghiệm địa phương của (WSOP) thì tồn tại $k^* \in K^+ \setminus \{0_{Y^*}\}$ và $d^* \in D^+$ sao cho với mọi $(y,\ z) \in D^C(F, G)_+(x_0, y_0,\ z_0)(X)$,

$$\langle k^*, y\rangle + \langle d^*, z\rangle \ge 0 \ \text{và}\ \langle d^*, z_0\rangle = 0.$$

Chứng minh. Do $(x_0,\ y_0)$ là nghiệm của (WSOP), nên theo Mệnh đề 3.1, tồn tại $(k^*,\ d^*) \in K^+ \times D^+ \setminus \{(0_{Y^*}, 0_{Z^*})\}$ sao cho với mọi $(y,\ z) \in D^C(F, G)_+(x_0, y_0,\ z_0)(X)$,

$$\langle k^*, y\rangle + \langle d^*, z\rangle \ge 0 \ \text{và}\ \langle d^*, z_0\rangle = 0.$$

Áp dụng Mệnh đề 3.2 cho ánh xạ đa trị (F, G), với mỗi $(y,\ z) \in \bigcup_{x \in X} F(x) \times G(x)$, thì

$$(y,\ z) - (y_0,\ z_0) \in D^C(F, G)_+(x_0, y_0,\ z_0)(x - x_0).$$

Điều này dẫn đến $\langle k^*, y - y_0\rangle + \langle d^*, z - z_0\rangle \ge 0$, và do đó $\langle k^*, y - y_0\rangle + \langle d^*, z\rangle \ge 0$.

Giả thiết phản chứng $k^* = 0_{Y^*}$ thì $d^* \ne 0_{Z^*}$ và do đó

$$\langle d^*, z\rangle \ge 0, \forall z \in \bigcup_{x \in X} G(x). \qquad (7)$$

Do (WSOP) thỏa mãn định tính ràng buộc Slater dạng tổng quát nên tồn tại $x' \in X$ sao cho $G(x') \cap (-\mathrm{int}\, D) \ne \varnothing$, nghĩa là tồn tại $z' \in G(x') \cap (-\mathrm{int}\, D)$. Do $z' \in (-\mathrm{int}\, D)$ nên ta có $\langle d^*, z'\rangle < 0$ với $z' \in G(x') \subset \bigcup_{x \in X} G(x)$, mâu thuẫn với (7). Do đó, ta có $k^* \ne 0_{Y^*}$ dẫn đến điều phải chứng minh.

Mệnh đề 3.4. (Điều kiện đủ dạng KKT)

Cho $(F,\ G) : X \to 2^Y \times 2^Z$ *là ánh xạ đa trị* $(K \times D)$ *-tựa lồi nửa địa phương xác định trên tập hình sao S, trong đó* $A = \{x \in X : G(x) \cap (-D) \ne \varnothing\} \subseteq S$ *và S là tập con của X. Nếu* $x_0 \in A,\ y_0 \in F(x_0)$, $z_0 \in G(x_0) \cap (-D)$, $(k^*,\ d^*) \in K^+ \setminus \{0_{Y^*}\} \times D^+$ *thỏa*

$$\langle k^*, y\rangle + \langle d^*, z\rangle \ge 0 \ \text{và}\ \langle d^*, z_0\rangle = 0 \qquad (8)$$

với mọi $(y,\ z) \in D^C(F, G)_+(x_0, y_0,\ z_0)(X)$, *thì* $(x_0,\ y_0)$ *là một nghiệm của* (WSOP).

Chứng minh. Giả sử (x_0, y_0) không là một nghiệm của (WSOP). Khi đó, tồn tại $x \in A$ sao cho $(F(x) - y_0) \cap (-\operatorname{int} K) \neq \varnothing$.

Do đó, tồn tại $y \in F(x)$ và $z \in G(x) \cap (-D)$ sao cho $y - y_0 \in -\operatorname{int} K$.

Lưu ý rằng do $k^* \in K^+ \setminus \{0\}$, nên $\langle k^*, y - y_0 \rangle < 0$

Theo Mệnh đề 3.2 ta có:
$(F,G)(x) - (y_0, z_0) \subset D^C(F,G)_+(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)$.

Điều này cùng với (8) suy ra rằng
$\langle k^*, y - y_0 \rangle + \langle d^*, z - z_0 \rangle \geq 0.$

Do $\langle d^*, z_0 \rangle = 0$ và $z \in -D$, nên

$\langle k^*, y - y_0 \rangle \geq -\langle d^*, z - z_0 \rangle = -\langle d^*, z \rangle \geq 0,$
dẫn đến mâu thuẫn.

Định nghĩa 3.3. (Jahn and Khan, 2002; Jahn, 2009) Ánh xạ đa trị $F : X \to 2^Y$ được gọi là Γ-tựa lồi tại điểm (x_0, y_0) nếu sự tồn tại điểm $x \in A$, với $x \neq x_0$ và $\left(F(x) - \{y_0\}\right) \cap \Gamma \neq \varnothing$ dẫn đến $D^C F_+(x_0, y_0)(x - x_0) \cap \Gamma \neq \varnothing$.

Mệnh đề 3.5. (Điều kiện đủ dạng KKT) *Giả sử $A - x_0 \subseteq X$ với $(x_0, y_0, z_0) \in \operatorname{gr}(F,G)$. Nếu tồn tại $k^* \in K^+ \setminus \{0_{Y^*}\}$ và $d^* \in D^+$ sao cho $\langle d^*, z_0 \rangle = 0$ và điều kiện sau thỏa:*

$\langle k^*, y \rangle + \langle d^*, z \rangle \geq 0$, *với mọi* $(y, z) \in D^C(F,G)_+(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)$, (9)

với mọi $x \in A$.

Khi đó, điểm (x_0, y_0) là điểm cực tiểu nếu ánh xạ (F,G) là Γ-tựa lồi tại (x_0, y_0, z_0) với $\Gamma := (-K \setminus \{0_Y\}) \times (-D + \operatorname{cone}(z_0) - \operatorname{cone}(z_0))$.

Chứng minh. Đặt
$\Omega := \{x \in A \mid G(x) \cap (-D + \operatorname{cone}(z_0) - \operatorname{cone}(z_0)) \neq \varnothing\}$

Để chứng minh Mệnh đề cần kiểm tra điểm (x_0, y_0) là điểm cực tiểu của F trên Ω và do $A \subset \Omega$ nên (x_0, y_0) cũng là điểm cực tiểu của bài toán (WSOP). Trước hết, kiểm tra khẳng định với mỗi $x \in A$, điều kiện sau đây thỏa:

$D^C(F,G)_+(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) \cap \Gamma = \varnothing$.

Thật vậy, nếu khẳng định nêu trên không thỏa, thì tồn tại $\bar{x} \in A$ và

$(\bar{y}, \bar{z}) \in D^C(F,G)_+(x_0, y_0, z_0)(\bar{x} - x_0) \cap \Gamma$

và hơn nữa suy ra $\bar{y} \in -K \setminus \{0_Y\}$ và
$\bar{z} \in (-D + \operatorname{cone}(z_0) - \operatorname{cone}(z_0))$.

Bởi vì $k^* \in K^+ \setminus \{0_{Y^*}\}$ và $\langle d^*, z_0 \rangle = 0$, nên

$\langle k^*, \bar{y} \rangle + \langle d^*, \bar{z} \rangle < 0$, mâu thuẫn với (9).

Do đó $D^C(F,G)_+(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) \cap \Gamma = \varnothing$ và khẳng định này cùng với tính Γ-tựa lồi của (F,G) dẫn đến

$[(F,G)(x) - \{(y_0, z_0)\}] \cap \Gamma = \varnothing$, với mọi $x \in A$.

Điều này suy ra không tồn tại $x \in A$ sao cho $(F(x) - \{y_0\}) \cap (-K \setminus \{0_Y\}) \neq \varnothing$
và $(G(x) - z_0) \cap (-D + \operatorname{cone}(z_0) - \operatorname{cone}(z_0)) \neq \varnothing$.

Từ đây, suy ra rằng (x_0, y_0) cũng là điểm cực tiểu của bài toán (WSOP).

4 BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU MOND-WEIR

Trong phần này, luôn giả sử là $(x', y') \in \operatorname{gr} F$, $z' \in G(x') \cap -D$ và $\operatorname{dom} D^C(F,G)_+(x', y', z') = X$. Bài toán đối ngẫu Mond-Weir (Mond and Weir, 1981) của (WSOP) sử dụng đạo hàm đa trị Clarke ký hiệu là (MWDP) xác định bởi

$$\begin{cases} \operatorname{WMax}_K \ h(x', y', z', k^*, d^*) = y', \\ \quad \text{s.c.} \ \langle k^*, y \rangle + \langle d^*, z \rangle \geq 0, \\ \qquad \forall (y, z) \in \bigcup\limits_{x \in X} D^C(F,G)_+(x', y', z')(x), \\ \qquad \langle d^*, z' \rangle \geq 0, \\ \qquad (k^*, d^*) \in (K^+ \setminus \{0\}) \times D^+. \end{cases}$$

Tập các điểm chấp nhận được của bài toán (MWDP) ký hiệu và xác định bởi

$$\Omega_{MW} := \{(x',y',z',k^*,d^*) \in X\times Y\times Z\times(K^+\setminus\{0\})\times D^+ \mid \langle d^*,z'\rangle \ge 0, \langle k^*,y\rangle + \langle d^*,z\rangle \ge 0,\ \forall(y,z) \in \bigcup_{x\in X} D^C(F,G)_+(x',y',z')(x)\}.$$

Điểm $\left(\overline{x'},\overline{y'},\overline{z'},\overline{k}^*,\overline{d}^*\right) \in \Omega_{MW}$ là nghiệm của bài toán (MWDP) nếu, với mọi $y' \in F(x')$ với $(x',y',z',k^*,d^*) \in \Omega_{MW}$, ta có

$$\left(h(x',y',z',k^*,d^*) - h(\overline{x'},\overline{y'},\overline{z'},\overline{k}^*,\overline{d}^*)\right) \cap \operatorname{int} K = \varnothing$$

Mệnh đề 4.1. (Đối ngẫu yếu)

Giả sử $(F,G): X \to 2^Y \times 2^Z$ là ánh xạ đa trị $(K\times D)$-tựa lồi nửa địa phương xác định trên tập hình sao S, trong đó $A = \{x\in X : G(x)\cap(-D) \ne \varnothing\} \subseteq S$ và S là tập con của X. Nếu $(x,y)\in\Omega$, $(x',y',z',k^*,d^*) \in \Omega_{MW}$ thì

$$y - h(x',y',z',k^*,d^*) \notin -\operatorname{int} K.$$

Chứng minh. Giả thiết phản chứng $y - h(x',y',z',k^*,d^*) \in -\operatorname{int} K$, nghĩa là

$$y - y' \in -\operatorname{int} K.$$

Khi đó, vì $k^* \in K^+\setminus\{0_{Y^*}\}$ nên

$$\langle k^*, y-y'\rangle < 0. \qquad (10)$$

Do $(x,y)\in\Omega$, nên $G(x)\cap(-D)\ne\varnothing$ và $y\in F(x)$. Theo Mệnh đề 3.2,

$$(F,G)(x) - (y',z') \subset D^C(F,G)_+(x',y',z')(x-x').$$

Bởi vì $G(x)\cap(-D)\ne\varnothing$, nên tồn tại $z\in G(x)\cap(-D)$ và từ $d^*\in D^+$, $\langle d^*, z\rangle \le 0$.

Do $(x',y',z',k^*,d^*)\in\Omega_{MW}$, nên $\langle d^*, z'\rangle \ge 0$, dẫn đến $\langle d^*, z-z'\rangle = \langle d^*, z\rangle - \langle d^*, z'\rangle \le 0$.

Hơn nữa, từ $(x',y',z',k^*,d^*)\in\Omega_{MW}$ và

$$(y-y', z-z') \in (F,G)(x) - (y',z') \subset D^C(F,G)_+(x',y',z')(x-x'),$$

dẫn đến

$$\langle k^*, y-y'\rangle + \langle d^*, z-z'\rangle \ge 0.$$

Khi đó, suy ra được

$$\langle k^*, y-y'\rangle \ge -\langle d^*, z-z'\rangle \ge 0,$$

mâu thuẫn với (10).

Mệnh đề 4.2. (Đối ngẫu mạnh)

Giả sử $(F,G): X\to 2^Y\times 2^Z$ là ánh xạ đa trị $(K\times D)$-tựa lồi nửa địa phương xác định trên tập hình sao S, trong đó $A = \{x\in X : G(x)\cap(-D)\ne\varnothing\} \subseteq S$ và S là tập con của X và (WSOP) thỏa định tính ràng buộc Slater dạng tổng quát. Nếu $(x_0,y_0)\in\Omega$ là nghiệm địa phương của bài toán (WSOP) thì tồn tại $(\overline{k}^*,\overline{d}^*) \in K^+\setminus\{0_{Y^*}\}\times D^+$ sao cho $(x_0,y_0,z_0,\overline{k}^*,\overline{d}^*)$ là nghiệm của (MWDP).

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.3, tồn tại

$$(\overline{k}^*,\overline{d}^*) \in K^+\setminus\{0_{Y^*}\}\times D^+$$

sao cho với mọi $(y,z)\in D^C(F,G)_+(x_0,y_0,z_0)(X)$,

$$\left\langle \overline{k}^*, y\right\rangle + \left\langle \overline{d}^*, z\right\rangle \ge 0 \text{ và } \left\langle \overline{d}^*, z_0\right\rangle = 0,$$

và do đó $(x_0,y_0,z_0,\overline{k}^*,\overline{d}^*)\in\Omega_{MW}$.

Mệnh đề thỏa nếu chứng minh được $(x_0,y_0,z_0,\overline{k}^*,\overline{d}^*)$ là nghiệm của (MWDP). Giả thiết phản chứng $(x_0,y_0,z_0,\overline{k}^*,\overline{d}^*)$ không là nghiệm của (MWDP), nghĩa là tồn tại $y'\in F(x')$ với $(x',y',z',k^*,d^*)\in\Omega_{MW}$ sao cho

$$\left(h(x',y',z',k^*,d^*) - h(x_0,y_0,z_0,\overline{k}^*,\overline{d}^*)\right)\cap\operatorname{int} K = \varnothing$$

Khi đó, tồn tại $y'\in F(x')$ với $(x',y',z',k^*,d^*)\in\Omega_{MW}$ sao cho $y'-y_0\in\operatorname{int} K$.

Do đó, tồn tại $(x_0,y_0)\in\Omega$ và $(x',y',z',k^*,d^*)\in\Omega_{MW}$ sao cho $y_0 - y' \in -\operatorname{int} K$, mâu thuẫn với Mệnh đề 4.1.

Mệnh đề 4.3. (Đối ngẫu ngược)

Cho $(x',y')\in \operatorname{gr}F$, $z'\in G(x')\cap -D$ và $(x',y',z',k^*,d^*)\in\Omega_{MW}$. Nếu $(F,G): X\to 2^Y\times 2^Z$ là ánh xạ đa trị $(K\times D)$-tựa lồi nửa địa phương xác định trên tập hình sao S và (WSOP) *thỏa định tính ràng buộc Slater dạng tổng quát thì $\left(\overline{x'},\overline{y'}\right)$ là nghiệm của bài toán* (WSOP).

Chứng minh. Vì $(x', y') \in \mathrm{gr}F$, $z' \in G(x') \cap -D$ và $(x', y', z', k^*, d^*) \in \Omega_{MW}$ nên $(k^*, d^*) \in K^+ \setminus \{0_{Y^*}\} \times D^+$ và $\langle k^*, y\rangle + \langle d^*, z\rangle \geq 0$, $\forall (y, z) \in \bigcup_{x \in X} D^C(F,G)_+(x', y', z')(x)$ và $\langle d^*, z'\rangle \geq 0$.

Chứng minh tương tự Mệnh đề 3.4, ta có (x', y') là một nghiệm của (WSOP).

5 BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU WOLFE

Trong phần này, luôn giả sử là $(x', y') \in \mathrm{gr}F$, $z' \in G(x') \cap -D$, $k_0 \in K \setminus \{0\}$ là một điểm cố định và $\mathrm{dom}D^C_{K\times D}(F,G)_+(x', y', z') = X$. Bài toán đối ngẫu Wolfe (Wolfe, 1961) của (WSOP) sử dụng đạo hàm đa trị Clarke ký hiệu là (WDP) xác định bởi

$$\begin{cases} \mathrm{WMax}_K \ h_1(x', y', z', k^*, d^*) = y' + \langle d^*, z'\rangle k_0, \\ \quad \text{s.c.} \ \langle k^*, y\rangle + \langle d^*, z\rangle \geq 0, \\ \quad\quad \forall (y, z) \in \bigcup_{x \in X} D^C(F,G)_+(x', y', z')(x), \\ \quad\quad \langle k^*, k_0\rangle = 1, \\ \quad\quad (k^*, d^*) \in (K^+ \setminus \{0\}) \times D^+. \end{cases}$$

Tập các điểm chấp nhận được của bài toán (WDP) ký hiệu và xác định bởi

$$\Omega_W := \{(x', y', z', k^*, d^*) \in X \times Y \times Z \times (K^+ \setminus \{0\}) \times D^+ \mid \langle k^*, k_0\rangle = 1, \langle k^*, y\rangle + \langle d^*, z\rangle \geq 0,\ \forall (y, z) \in \bigcup_{x \in X} D^C(F,G)_+(x', y', z')(x)\}.$$

Điểm $(\overline{x'}, \overline{y'}, \overline{z'}, \overline{k}^*, \overline{d}^*) \in \Omega_W$ là nghiệm của bài toán (WDP) nếu, với mọi $(x', y', z', k^*, d^*) \in \Omega_W$, ta có

$$\left(h_1(x', y', z', k^*, d^*) - h_1(\overline{x'}, \overline{y'}, \overline{z'}, \overline{k}^*, \overline{d}^*)\right) \notin \mathrm{int}\ K.$$

Mệnh đề 5.1. (Đối ngẫu yếu)

Giả sử $(F, G): X \to 2^Y \times 2^Z$ là ánh xạ đa trị $(K \times D)$-tựa lồi nửa địa phương xác định trên tập hình sao S, trong đó $A = \{x \in X : G(x) \cap (-D) \neq \emptyset\} \subseteq S$ và S là tập con của X. Nếu $(x, y) \in \Omega$, $(x', y', z', k^*, d^*) \in \Omega_W$ thì

$$y - h_1(x', y', z', k^*, d^*) \notin -\mathrm{int}K.$$

Chứng minh. Đầu tiên, do $x \in X$ và $G(x) \cap (-D) \neq \emptyset$, từ Mệnh đề 3.2 dẫn đến

$$((F,G)(x) - (y', z')) \subset D^C(F,G)_+(x', y', z')(x - x').$$

Lấy $z \in G(x) \cap (-D)$, do $(x, y) \in \Omega$ và ràng buộc đầu tiên của bài toán (WDP) dẫn đến

$$\langle k^*, y - y'\rangle + \langle d^*, z - z'\rangle \geq 0. \quad (11)$$

Giả thiết phản chứng

$y - h_1(x', y', z', k^*, d^*) \in -\mathrm{int}K$, nghĩa là

$$y - \left(y' + \langle d^*, z'\rangle . k_0\right) \in -\mathrm{int}K.$$

Bởi vì $z \in -D$ và $d^* \in D^+$ nên $\langle d^*, z\rangle \leq 0$. Do đó, $\langle d^*, z\rangle . k_0 \in -K$ và

$$\begin{aligned} & y - y' + \langle d^*, z - z'\rangle . k_0 \\ & = y + \langle d^*, z\rangle . k_0 - \left(y' + \langle d^*, z'\rangle . k_0\right) \\ & \in -K - \mathrm{int}K \subset -\mathrm{int}K. \end{aligned}$$

Do $k^* \in K^+ \setminus \{0_{Y^*}\}$, nên

$$\langle k^*, y - y' + \langle d^*, z - z'\rangle . k_0\rangle < 0,$$

và từ $\langle k^*, k_0\rangle = 1$, suy ra

$$\begin{aligned} & \langle k^*, y - y'\rangle + \langle d^*, z - z'\rangle \langle k^*, k_0\rangle \\ & = \langle k^*, y - y'\rangle + \langle d^*, z - z'\rangle < 0, \end{aligned}$$

mâu thuẫn với (11). Do đó, thu được kết luận $y - h_1(x', y', z', k^*, d^*) \notin -\mathrm{int}K$.

Mệnh đề 5.2. (Đối ngẫu mạnh)

Giả sử $(F, G): X \to 2^Y \times 2^Z$ là ánh xạ đa trị $(K \times D)$ - tựa lồi nửa địa phương xác định trên tập hình sao S, trong đó $A = \{x \in X : G(x) \cap (-D) \neq \emptyset\} \subseteq S$ và S là tập con của X và (WSOP) thỏa định tính ràng buộc Slater dạng tổng quát. Nếu $(x_0, y_0) \in \Omega$ là nghiệm địa phương của bài toán (WSOP) thì tồn tại $(\overline{k}^*, \overline{d}^*) \in K^+ \setminus \{0_{Y^*}\} \times D^+$ sao cho $(x_0, y_0, z_0, \overline{k}^*, \overline{d}^*)$ là nghiệm của (WDP).

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.3, tồn tại $(\hat{k}^*, \hat{d}^*) \in K^+ \setminus \{0_{Y^*}\} \times D^+$ sao cho với mọi $(y, z) \in D^C(F,G)_+(x_0, y_0, z_0)(X)$,

$$\langle \hat{k}^*, y\rangle + \langle \hat{d}^*, z\rangle \geq 0 \text{ và } \langle \hat{d}^*, z_0\rangle = 0.$$

Do $k_0 \in K\setminus\{0\}$ và $\hat{k}^* \in K^+\setminus\{0\}$ nên ta có $\alpha := \langle \hat{k}^*, k_0\rangle > 0$. Đặt $(\bar{k}^*, \bar{d}^*) = \frac{1}{\alpha}(\hat{k}^*, \hat{d}^*)$, thì

$$(\bar{k}^*, \bar{d}^*) \in K^+\setminus\{0_{Y^*}\}\times D^+,$$

$$\langle \bar{k}^*, k_0\rangle = \frac{1}{\alpha}\langle \hat{k}^*, k_0\rangle = \frac{1}{\alpha}.\alpha = 1.$$

Hơn nữa, $\forall (y,z) \in \bigcup_{x\in X} D^C(F,G)_+(x',y',z')(x)$,

$$\langle \bar{k}^*, y\rangle + \langle \bar{d}^*, z\rangle = \frac{1}{\alpha}\left(\langle \hat{k}^*, y\rangle + \langle \hat{d}^*, z\rangle\right) \geq 0.$$

Do đó, tồn tại $(\bar{k}^*, \bar{d}^*) \in K^+\setminus\{0_{Y^*}\}\times D^+$ sao cho $\left(x_0, y_0, z_0, \bar{k}^*, \bar{d}^*\right)$ là điểm chấp nhận được của bài toán (WDP) và $\langle \bar{d}^*, z_0\rangle = \frac{1}{\alpha}\langle \hat{d}^*, z_0\rangle = 0$.

Tiếp theo, cần chứng minh $(x_0, y_0, z_0, \bar{k}^*, \bar{d}^*)$ là nghiệm của (WDP). Giả thiết phản chứng tồn tại $(x', y', z', k^*, d^*) \in \Omega_W$ sao cho

$$h_1(x', y', z', k^*, d^*) - h_1(x_0, y_0, z_0, \bar{k}^*, \bar{d}^*) \in \text{int } K,$$

nghĩa là

$$h_1(x', y', z', k^*, d^*) - (y_0 + \langle \bar{d}^*, z_0\rangle . k_0) \in \text{int} K.$$

Từ $\langle \bar{d}^*, z_0\rangle = 0$ suy ra rằng

$$h_1(x', y', z', k^*, d^*) - y_0 \in \text{int} K,$$

hay tương đương với

$$y_0 - h_1(x', y', z', k^*, d^*) \in -\text{int} K,$$

mâu thuẫn với Mệnh đề 5.1.

Mệnh đề 5.3. (Đối ngẫu ngược)

Cho $(x', y') \in \text{gr}F$, $z' \in G(x') \cap -D$ và $(x', y', z', k^*, d^*) \in \Omega_W$. Nếu $(F, G): X \to 2^Y \times 2^Z$ là ánh xạ đa trị $(K\times D)$ - tựa lồi nửa địa phương xác định trên tập hình sao S, (WSOP) thỏa định tính ràng buộc Slater dạng tổng quát và $\langle d^*, z'\rangle = 0$ thì $(\overline{x'}, \overline{y'})$ là nghiệm của bài toán (WSOP).

Chứng minh. Vì $(x', y') \in \text{gr}F$, $z' \in G(x') \cap -D$ và $(x', y', z', k^*, d^*) \in \Omega_W$ nên $(k^*, d^*) \in K^+\setminus\{0_{Y^*}\}\times D^+$ thỏa $\langle k^*, k_0\rangle = 1$ và $\langle k^*, y\rangle + \langle d^*, z\rangle \geq 0$ $\forall (y,z) \in \bigcup_{x\in X} D^C(F,G)_+(x',y',z')(x)$ và $\langle d^*, z'\rangle = 0$.

Chứng minh tương tự Mệnh đề 3.4, ta có (x', y') là một nghiệm của (WSOP).

6 KẾT LUẬN

Trong bài báo này, điều kiện tối ưu cần và đủ cho bài toán tối ưu đa trị có ràng buộc sử dụng đạo hàm đa trị Clarke theo hướng nón cho lớp hàm gần lồi nửa địa phương đã được khảo sát. Sau đó, các bài toán đối ngẫu dạng Mond-Weir và Wolfe cho bài toán tối ưu đa trị có ràng buộc và các định lý về đối ngẫu yếu, đối ngẫu mạnh và đối ngẫu ngược sử dụng dạng đạo hàm đa trị Clarke theo hướng nón được trình bày. Trong bài báo của Tung et al. (2019), đạo hàm tiếp liên và các giả thiết lồi đã được sử dụng để khảo sát điều kiện tối ưu và bài toán đối ngẫu cho bài toán tối ưu tập. Sử dụng đạo hàm đa trị Clarke để giảm nhẹ các giả thiết lồi trong điều kiện tối ưu và bài toán đối ngẫu cho bài toán tối ưu tập trong công trình của Tung et al. (2019) là một chủ đề thú vị trong các nghiên cứu tiếp theo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, N.L.H., 2016. Mixed type duality for set-valued optimization problems via higher-order radial epiderivatives. Numerical Functional Analysis and Optimization. 37(7): 823–838.

Arora, R. and Lalitha, C.S., 2005. Proximal proper efficiency in set-valued optimization. Omega - The International Journal of Management Science. 33(5): 407–411.

Aubin, J.P. and Frankowska, H., 1990. Set-Valued Analysis. Birkhäuser, Boston, 461 pages.

Chen, C.R., Li, S.J. and Teo, K.L., 2009. Higher order weak epiderivatives and applications to duality and optimality conditions. Computers & Mathematics with Applications. 57(8): 1389–1399.

Clarke, F.H., 1983. Optimization and nonsmooth analysis. John Wiley, New York, 321 pages.

Corley, H.W., 1988. Optimality conditions for maximizations of set-valued functions. Journal of Optimization Theory and Application. 58(1): 1–10.

Jahn, J., 2009. Vector Optimization. Springer, Berlin, 481 pages.

Jahn, J. and Khan, A.A., 2002. Generalized contingent epiderivative in set-valued optimization: Optimality conditions. Numerical Functional Analysis and Optimization. 23(7–8): 807–831.

Khan, A.A., Tammer, C. and Zănilescu, C., 2016. Set-Valued Opimization. Springer, Berlin, 765 pages.

Lalitha, C.S. and Arora, R., 2008. Weak Clarke epiderivative in set-valued optimization. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 342(1): 704–714.

Lalitha C.S. and Arora, R., 2009. Proper Clarke epiderivative in set-valued optimization. Taiwanese Journal of Mathematics. 13(6A): 1695–1710.

Li, S.J, Teo, K.L. and Yang X.Q., 2008. Higher-order Mond–Weir duality for set-valued optimization. Journal of Computational and Applied Mathematics. 217(2): 339–349.

Mond, B. and Weir, T., 1981. Generalized concavity and duality. In: S. Schaible, W.T. Ziemba (Eds.), Generalized Concavity in Optimization and Economics, Academic Press, New York. 263–279.

Sach, P.H. and Craven, B.D., 1991. Invexity in multifunction optimization. Numerical Functional Analysis and Optimization. 12(3–4): 383–394.

Wolfe, P., 1961. A duality theorem for nonlinear programming. Quarterly of Applied Mathematics. 19(3): 239–244.

Tung, L.T., 2017. Strong Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions and duality for nonsmooth multiobjective semi-infinite programming via Michel-Penot subdifferential. Journal of Nonlinear Functional Analysis. 2017: 1–21. DOI: 10.23952/jnfa.2017.49

Tung, L.T., Khai, T.T., Hung, P.T. and Ngoc, P.L.B., 2019. Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions and duality for set optimization problems with mixed constraints, Journal of Applied and Numerical Optimization. 1(3): 277–291.

Yu, G. and Kong, X., 2016. Optimality and duality in set-valued optimization using higher-order radial derivatives. Statistics, Optimization & Information Computing. 4(2): 154–162.